

نظرية النسبية العامة
لأنشتاين
إعداد و ترجمة
جلال الحاج عبد

المقدمه

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله على آلآئه و نعمائه و الصلاة و السلام على نبيه المختار و آل بيته الأطهار. يسرني و يسعدني أن أقدم دراسه مختصره على أهم أنجاز علمي يعتبر من مفاخر البشريه ألا و هو نظرية النسبية العامة. إن لهذه النظرية مكانة مرموقة عند متخصصيها و جاهليها، و ذلك يرجع للحس المشترك عندهم بعظمتها. أسأل الله عزّ و جلّ أن يوفقني ببيانها و يوفقكم بإستيعابها. كتبت هذا الكتاب بعجلة حيث كنت أخشى المنية كل لحظة، و أنا أشعر بأن هذا الكتاب أمانة عليّ أدائها.

لو أن الأضطرابات الفلسفيه هي حصيلة التوهمات، فعلينا بنظام لغوي جديد، نظام ليس للتجديد فحسب و إنما لترقي الإدراك لأعلى مستوياته، و كل من يسعى لكهذا النظام عليه أن يستعد لمقاومة منتقديه[1]، كالمقاومة التي واجهتها جميع الأنقلابات العلمية. ناتج الأنقلاب على الهندسه و الحساب في تاريخ العلم هو حكومة نظرية النسبيه التي جائت بدولة الفلسفة الحديثة ... لا يمكن النظر لنظرية النسبيه نظرة منقطعه عن مقاومة مسلمات التوازي أمام الهندسه، ولا عن المبارزه التي خاضتها الأعداد الخيالية أمام الحساب.

أكثر القوانين الفيزيائية و العلميه جائت ألهاماً من الطبيعة أو منطبقة على الظواهر الطبيعية، إلا قوانين فيزياء النسبيه فجائت مغايرة لقوانين الطبيعة و أبتعدت كل البعد عن الطبيعة و ظواهرها، و لولا الأرضيه الهندسيه و الفلسفيه التي و ضعتها الهندسه الهذلوليه و البيضويه و الأعداد الخياليه لما تمكن أنشتاين من وضع هذه النظرية و بسطها. فالهندسه الهذلوليه كانت النموذج النظري لهذه النظريه و الهندسه البيضويه كانت النموذج العملي لها.

كل من يسعى لبرهان قضية رياضيه سوف يقع في فلسفة الرياضيات، كما هو الحال مع من يتعامل مع مبدأ اللا وثوقية لهيزنبرغ فسوف يقع في فلسفة الفيزياء[1]. لذلك، لايمكن فصل الفلسفة عن نظرية النسبية بشقيها العام و الخاص، و بما أن هذا الكتاب يتناول النسبية العامة لذلك ألقينا النظرة الفلسفية لأهم مفهومين فلسفيين هما: المكان و الزمان، و هذان المفهومان هما المحوران الرئيسيان في نظرية

1- Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Second edition, Marvin Jay Greenberg, W. H. Freeman & Co. , 1979.

النسبية العامة فلسفياً و فيزيائياً و رياضياً. قبل نظرية النسبية العامة كانا هذان المفهومان منفصلان حتى قامت هذه النظريه بربط كل منهما بالآخر رياضياً و فيزيائياً و فلسفياً. هناك بعض الآراء الفلسفيه قبل نظرية النسبية تقرّ بوحدة المكان و الزمان لكن كانت تفتقد للبراهين العلميه. فالعقليه المهيمنة على هذان المفهومان قبل ظهور النسبية العامة و حين ظهورها هي عقلية كانتيه، يصعب التفكير بما هو ليس بكانتي. حيث كان يعتقد كانت بعدم إمكان تصور هندسة لا إقليديه، و ساد التصور هذا على جميع تصوراته، لذلك يمكن القول بأن لباتشفسكي و غاوس و بوليائي قدّ صنعوا عالماً جديداً تخطى كل تصورات كانت، من ثم وضع أنشتاين نظريته في هذا العالم.

بأعتقاد لباتشفسكي أي فرع من فروع الرياضيات مهما كان مُجرد، لابد و إن يستخدم يوماً في ظواهر العالم الواقعي[1]. فالنسبية العامة ظهرت تناطح أقوى نظريات عصرها، الكانتيه في المكان و الزمان و النيوتنيه في الفيزياء، و الإقليديه في الهندسه. ظهرت النسبية العامة بهيئة نظريه تتخطى المؤلوف و المعروف من الذره الى المجره. أستعانت نظرية النسبيه العامه بأهم أنجازات عصرها في الرياضيات و هي الهندسه الهذلوليه و البيضويه و حساب التينسور و السطوح الريمانيه، فالقدره الرياضيه العاليه الموجودة وراء النسبيه العامه جعلت هذه النظريه تأخذ شأناً تجاوز مكانها و زمانها !

من الإجحاف البحث في نظرية النسبيه العامه بعيداً عن الهندسه الهذلوليه و مفاهيمها. وجود فصل حول الهندسه الهذلوليه يُهيئ الأرضيه لإستيعاب مفاهيم ونتائج النسبيه العامه. عندما نبرّهن على قضايا في الهندسه الهذلوليه لا يمكن البرهان عليها في الهندسه الإقليديه، و عند مطالعة نموذج بلترامي – كلاين و كيف يأخذ الطول (المستقيم) في هذا النموذج تعريفاً مغايراً للطول المألوف عليه، و عند التعرف على رباعي أضلاع لامبرت (رباعي أضلاع مجموع زواياه الداخلية أقلّ من ثلاث مائة و ستون درجه) تتهيئ الأرضيه لطرح النتائج النظريه، لنظرية النسبيه كإنكماش الطول و إتساع الزمن و تقوس الفضاء و ...

1- Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Second edition, Marvin Jay Greenberg, W. H. Freeman & Co. , 1979.

يبحث هذا الكتاب بعض أهم مواضيع النسبية العامة، كالمواضيع التأريخية و الفلسفية و الرياضية و الفيزيائية حيث يبدأ بالمفهوم الفلسفي للفضاء و الزمان و المكان ثم الهندسة الهذلولية و النسبية الخاصة ثم النظرية النسبية العامة. المفاهيم الرياضيه التي يستعان بها في هذه النظريه هي مفاهيم و روابط معقده و مملة لكن سعيت كل السعي لأعطي الوجه الأبسط لهذه الروابط و أستعنت بمصادر تشرح و تبين هذه النظريه بصورة مبسطه و عمليه، و قدّ قمت بتوحيد الحروف في روابط هذه المصادر و كذلك توحيد كتابة هذه الروابط ، طريقة طباعة المعادلات التينسوريه تختلف بين مصدر و آخر، و كتابة المعادلات و الروابط بطرق مختلفه يؤدي الى الألتباس و ربما سوء فهم الموضوع. لذلك تعمدت على توحيد الروابط و الحروف المستخدمة في طباعة هذه الروابط. في أكثر المصادر التي طالعتها، الحروف في طباعة معادلات النسبية العامة متشابكه و قريبة من بعضها و هذا يجعل القارئ المبتدأ ينفر هذه المعادلات و ربما يترك مطالعة الموضوع، لذلك طبعت هذا الكتاب بيدي و كأني أواجه طالب مبتدأ في مطالعة النسبية العامة، كذلك لن أرقم المعادلات و الروابط و ذلك للأبتعاد عن دوامة الرجوع للمعادلات السابقه، و المعادله الضروريه كتبتها ثانية. هناك فصل مستقل لبعض الأمثله المحلوله هي بمثابة تمارين في النسبية العامة، تساعد على فهم المواضيع المرتبطة بها، كذلك ختمت الكتاب بمسرد لبعض أهم أصطلاحات النسبية العامة.

تناولت المكتبه العربيه نظرية النسبيه الخاصه من جوانب عديده لكنها أهملت نظرية النسبيه العامه حتى أصبحت حكراً على متخصصيها، لذلك ما دخلت في تفاصيل نظرية النسبيه الخاصة و ما أعطيت أمثلة عليها و أكتفيت ببعض مفاهيمها و نتائجها. أخذت أكثر نتائج النسبية عند الكثير من محبيّ هذه النظرية بعداً فلسفياً تجاوز أبعادها الأخرى، و أصبحت هذه النظريه و بالأخصّ النسبيه الخاصه مقولة فلسفيه أكثر من ما هيه نظريه رياضيه و فيزيائيه، لذلك أخذت جانب الحيطة عند هذه النظرية و أكتفيت ببعض مفاهيمها الرياضيه، لتهيئة الأذهان لأستيعاب النسبية العامة.

يمكن أن يسأل القارئ هل هذا الكتاب هو نسبية أنشتاين أم كانت؟ بالطبع هو نسبية أنشتاين، لكن العقليه الفلسفيه المهيمنة في زمن ظهور هذه النظريه هي عقليه كانتيه، و الميكانيك نيوتني، و الهندسه إقليديه. فلكانت في الفلسفة نفس السهم لنيوتن في الفيزياء و نفس السهم لإقليدس في الهندسة، فهي إذن ليست نسبية كانت و لا نسبية نيوتن ولا نسبية إقليدس، هي نسبية أنشتاين. لا يمكن الخوض في النسبية العامة

دون الغوص في مفهوم الزمان و المكان، و بما أن الزمان و المكان يشكلان نقطة الأرتكاز في فلسفة كانت، و قدّ ناقشهما من أوجه عديده ما يناسب معظم جوانب النسبية العامة، (كما ستلاحظون)، لذلك ألقيت الضوء على نظريات كانت في الزمان و المكان، و قدّ أضاء هذا الضوء بعض النظريات الأخرى. و لقد تعمدت بأن لا أدخل بالمفهوم الوجودي للزمان و المكان (ما تجاهلته) و ذلك للحفاظ على روح و حقيقة النسبية العامة كحقيقة علمية، فيها الخيال و الميتافيزيقا ضرباً من الواقع.

هذا الكتاب هو نظرية النسبية العامة من منظرها أنشتاين و الذين ساهمو في نموّها و بسط مفاهيمها أمثال نيوتن ،كانت ،أرنست ماخ ، غاوس، لباتشفسكي، ريمان، شوارتزشيلد، فريدمان. و للأمانه التاريخيه أقول: لقدّ لعبت أفكار ريمان الرياضية دوراً هاماً في نموّ و تطور مفاهيم النسبية العامة، و بنظري ريمان قدّ قاب قوسين أو أدنى من نظرية النسبية العامة كذلك بوانكاريه .

ينظر هذا الكتاب لنظرية النسبية العامه نظرة رياضيه و فلكيه، و قدّ غضيت النظر عن البحث في مجالها الذريّ، و الكوانتمي، و الكهرومغناطيسي، و ذلك لتأثري الشديد برياضياتها و نتائجها الفلكيه. و هذا الكتاب يشمل هذه النظريه و النظريات المرتبطة بها من مُنظّريها، و لم أضف شيئاً إليها و إن كانت لديه بعض النظرات و التحفظات عليها.

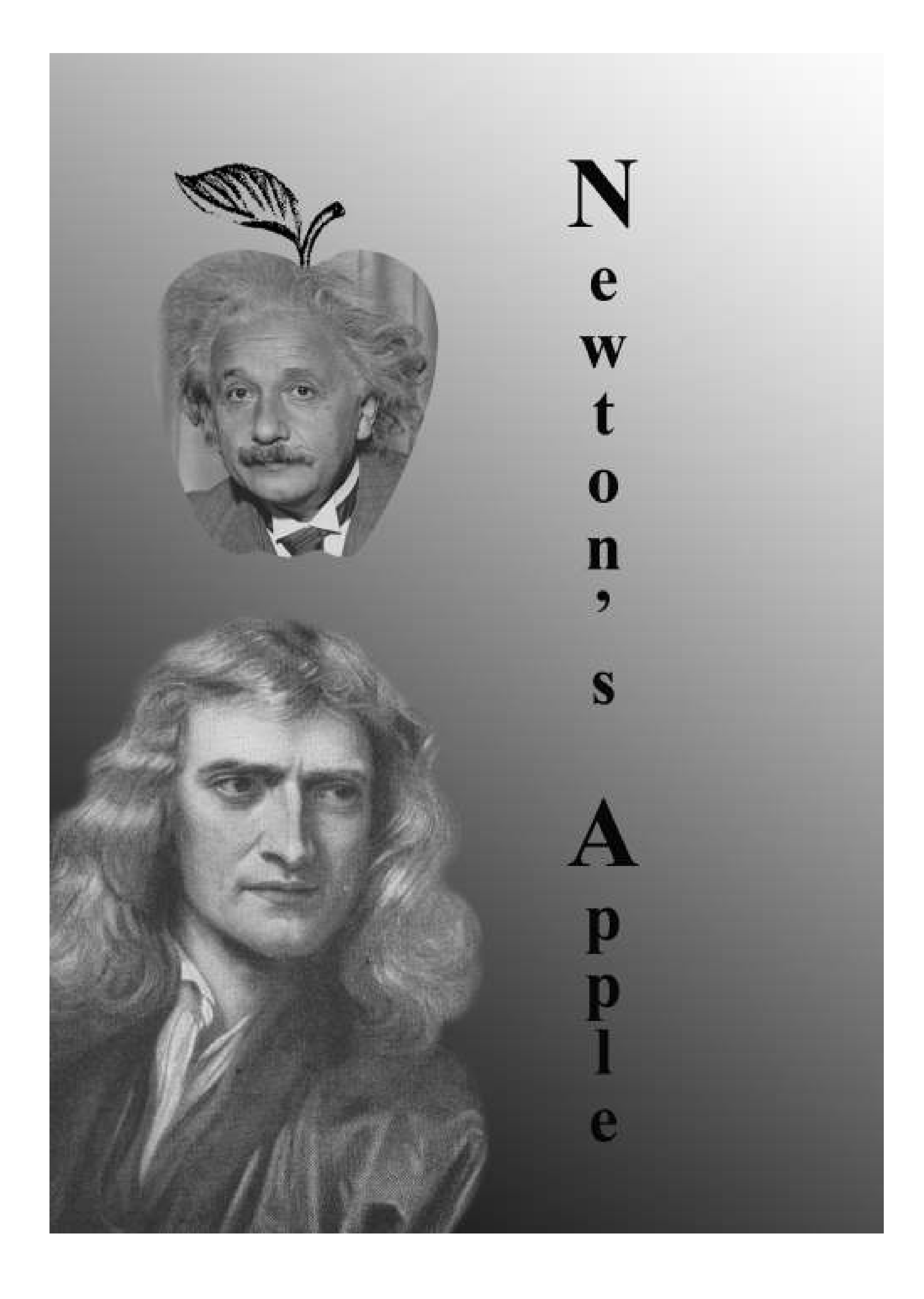
يقول أرخميدس "لو أعطيت نقطة أرتكاز لرفعت الأرض" . لو أعطينا لأرخميدس نقطة الأرتكاز هذه فهل سيقدر على رفع الأرض؟ أن العتلة التي سيرفع بها أرخميدس الأرض هي أكبر وزناً (أو كتلة) من الأرض نفسها! لا يمكن أعطاء أرخميدس نقطة الأرتكاز هذه، و لا هو قادر على هذه العتلة. إذن وضع نظرية أو طرح مقولة لها القدرة على تفسير الكون و ظواهره كلها، لا أقول من المستحيل، لكن أقول كنقطة أرتكاز أرخميدس و عتلته.

ليست النسبية العامة هي تخصصي و لا هي في مجال تخصصي، و لا تلقيت درساً فيها و لا في النسبية الخاصة، و لا في حساب التينسور، و لا في الهندسه اللا إقليديه. لكن ملئت هذه المواضيع حيزاً كبيراً من فكري و أعطيتها وقتاً طويلاً من عمري، و يرجع هذا الى تلك اللحظة الملكوتية التي جمعتني بمولا الموحدين علي بن أبي طالب عليه السلام، حين كنت صبياً في الثالثة عشر من عمري و حين

أنهيت دراستي الأبتدائيه، رأيته عليه السلام في المنام ، بملابس بيضاء يطغي عليها بياض وجهه الممتلأ بالنورانية، و كأني و أياه في الفضاء ... و في المكان الذي كنت أنا واقف فيه و هو أمامي رفعت رأسي إلى الأعلى و سألته: لو سرت في هذا المسير (و أنا أشير للأعلى بعيني، و أقصد بدون توقف) أين سأصل؟ فأجابني عليه السلام لنفس المكان الذي أنت فيه الآن! ، بقت هذه الرؤيا و أحداثها لا تفارق فكري و وعي و ذهني و ذاكرتي و أنا أكتبها الآن و قدّ مرّ عليها مايقارب السبعة و العشرون عاماً و كأنه عليه السلام أمامي الآن. أثارت عندي هذه الرؤيا حسّ الأستطلاع و البحث و عجز من حولي تفسيرها علمياً، حتى شآئت الأقدار أن تصبح الرياضيات موضوع مطالعتي الشخصيه، و حين تعرفت على النسبية العامة وجدتها ليست غريبة عني، و ما أدهشني فيها هو وجود بعض الفضائآت، تقوسها أو إنحنائها يقيّد الأشعة الضوئية أو الحزم الضوئية بالسير في مدارات مغلقه، أي يرجع الشعاع الضوئي إلى النقطة التي أنطلق منها. و هذا الكتاب هو لي بمثابة تعبير تلك الرؤيا.

جلال الحاج عبد

2007


Newton's Apple

الفضاء المطلق

معنى النسبيه في الفيزياء هو رفض فكرة الفضاء المطلق، ترفض النسبية الخاصة (1905) فضاء ميكلسون المطلق، و ترفض النسبية العامة (1915) فضاء نيوتن المطلق.

ظهور النسبية العامة هو نتيجة فشل جميع المساعي التي حاولت أصلاح نظرية نيوتن في الجاذبية (تربيع عكس الفاصلة) و إدخالها بشكل يرضي مراجع النسبية الخاصة. كذلك رغبة أنشتاين الفلسفية في حذف الفضاء المطلق من الفيزياء.

لا يمكن بناء نظرية ثقالية معتمدة على النسبية الخاصة، إن كانت هذه النظرية مرضية فهي غير مقنعة ، لأن النسبية الخاصة تبدأ بفرض وجود مراجع العطالية، و هذا ما أجبر أنشتاين أن يخطو خطوات أوسع من النسبية الخاصة.

أثرت عقلية ماخ على أفكار أنشتاين، لكن ما هي الأعتبارات على ماخية النسبية العامة؟ يجب التذكير بأن مبدأ ماخ ذو جذور كينماتيكيه كلاسيكيه، كذلك لا ينظر هذا المبدأ الى الحقول بأنها ذات معيارأحتمالي في الفضاء. أحياناً يُنظر الى مبدأ ماخ بأنه مبدأ ليس له أي أعتبار فيزيائي، و ذلك لأنه مبدأ كوني ولا يمكن إخضاع الكون كلّه للتجربة، إذن لا يمكن تجربة هذا المبدأ. و من هذا لا يمكن الأدعاء على أن العطالة هي من نتائج الفضاء المطلق أو الأجرام الكونية، لذلك نحن مع هذا المبدأ أمام خيارين إما فلسفي، وإما فيزيائي. ليست المسئلة كذلك فهو يهدي الى بعض النبؤآت اللا نيوتنية منها:

مجرتنا، هي أشبه بمنظومة عظيمة تدور، و مدة دورانها (مركز الدوران قرب الشمس) حدود 250 مليون سنة. لو إن مجرتنا تفتقد لهذه الحركة الدورانية لسقطت الشمس في مركز المجرة بعد حدود 20 مليون سنة. لو أطلع ماخ على هذه الحركة الدورانية لمجرتنا، لتمكن من خلال مبدئه فرض عالم عظيم خارج هذه المجرة. نفي الفضاء المطلق في مبدأ ماخ يتضمن عدم إستناد الفيزياء بأسرها على مراجع العطالية.

إستناداً على مبدأ ماخ، تلقائياً يفقد الفضاء دوره في الفيزياء، و لهذا لا وجود له. لكن للفضاء دور مهم في النسبية العامة، هذا الدورهو بهيئة فضاء – زمان رباعي الأبعاد. يعين هذا الفضاء – الزمان كلّ أنواع الحركة، يعني أي حركة تحت ثقالة و عطالة. السؤال هنا هل تُعين المادة الفضاء – الزمان؟ تبتعد النسبية قليلاً عن مبدأ ماخ بأحتساب أن الفضاء المطلق يؤثر و لا يتأثر، و الفضاء – زمان يؤثر على الكتلة بصفة مجال أو حقل، و تؤثر الكتلة عليه من خلال تغير إنحناء الفضاء. حققت النسبية العامة جزءاً من برنامج ماخ، و عوضاً عن حذف الفضاء بأكمله أكتفى أنشتاين بلا مطلقيته، و كذلك عوضاً عن جعل القوى العطالية، قوى ثقالية كما تصوره ماخ، جعلها قوى مادية تحمل أزر العطالة، و القوى الثقالية جعلها العطالة التي تعين الفضاء.

أشكالية فضاء نيوتن المطلق هي:

- هذا الفضاء هو فضاء فرضي و لا وجود له، وهو عاجز عن توضيح نفسه وأشبه بمقولة كبلر حين قال أن الملائكة هي التي تحرك الكواكب في مداراتها.
- لا وجود لأي طريق من بين ما لا نهاية من المراجع العطالية يشخص لنا فضاء نيوتن المطلق.
- تصور شئ تحدث منه جميع الأفعال و لا يتأثر هو بأي فعل يتعارض مع المفاهيم العملية عندالإنسان.

عدم تأيد الأثير و وحدة القوانين الفيزيائيه هي من أهم البراهين على نظرية النسبيه. لم تأيد التجارب وجود مادة تحمل الأمواج الضوئيه و تنقلها في الفضاء، أي نفي و ردّ فكرة الأثير. كذلك، لا يمكن تقسيم الفيزياء الى فروع مستقلة عن بعضها، فقوانين الكهرومغناطيس ليست مستقله عن قوانين الميكانيك، و كلّ تجربة ميكانيكية هي ليست مستقلة من البناء الكهرومغناطيسى للمادة.

قبل البدأ بالبحث حول الزمان و المكان لابد من برهان على بدآية الزمان و حدود المكان، و ما وجدته مناسباً لهذا البحث من بين براهين إمانوئيل كانت براهينه حول بدآية الزمان و حدود المكان و هي:

البرهان الكانتي على أن للعالم بدآية في الزمن: إذا فرضنا أن ليس للعالم بدآية في الزمن، و إنما كان موجوداً من زمن لا نهائي، يلزم أن تكون فترات زمنية لا نهائية في الماضي قدّ أكتملت في اللحظة الحاضرة أو في أي لحظة سابقة. لكن من المستحيل أن تكتمل سلسلة لا نهائية. إذن من المستحيل أن يكون العالم قدّ وجد في زمن لا نهائي. إذن لابد إن كانت له بدآية في الزمن.

البرهان الكانتي على أن العالم محدود في المكان: إذا فرضنا أن ليس للعالم حدود في المكان فإننا نفرض أننا أستكملنا عملية زمنية لا نهائية للمرور على أجزاء مكانية محدودة. لكن الزمن اللا نهائي مستحيل- كما قلنا- لأن السلسلة الزمنية التي أنتهت في لحظة محددة يجب أن يكون طرفها الأول محدوداً أيضاً، إذن يجب أن يكون العالم في المكان محدوداً.

أن الزمان و المكان كما أشار إيمانوئيل كانت أطاران مفطوران في صلب العقل الإنساني الذي يقوم بعملية المعرفة، شكلأن قبليان للحساسية يتم وفقاً لهما ترتيب معطيات هذه الحساسية و مضمون خبرة الإنسان بالعالم الخارجي، أو تجربته الخارجية. فالزمان و المكان إذن صورتان قبليتان أو شرطان للمعرفة. و ذلك لأن حسب النظر الكانتي المكان هو شكل تجربتنا الخارجية، و الزمان هو شكل تجربتنا الداخلية. لكن العالم الخارجي كما تنصّ عليه فلسفته النقدية لا ينفصل عن الشروط الداخلية في العقل الذي يتصوره[2].

يرى صموئيل الكسندر(S. Alexander)، أن الزمان و المكان الأصل الهائل أو الحقيقة المبدئية التي نشأ عنهما العالم، هيولي أولي أو جوهر أصلي صدرت عنهما كل الوجود بالأنبثاق، فعن الزمان و المكان أنبثقت أولاً المادة، و بالتدريج أنبثقت الحياة، ثم الوعي، و أخيراً الألوهية، بل أنهما يظلان أيضاً ماهية الموجودات بعد أنبثاقها عنهما، فتظل كل الأشياء مثل مصدرها زمانية مكانية[2].

أن المكان كائن دائماً في المكان، أما الزمان فيتدفق في قلب الزمان، إذن، أن الزمان يتوغل في مستويات فلسفية و علمية أبعد، لا يطولها المكان. فهما (الزمان و المكان) ليسا البته على قدم المساواة و ليسا متساويين أو متكافئين، بل كان الزمان دائماً متميزاً عن المكان و متقدم عليه. حتى أن صموئيل الكسندر رأى أنهما ندان لا ينفصلان، و أكد فلسفياً ما أكتدته النظرية النسبية علمياً من أنه لا يوجد مكان

1- الزمان في الفلسفة و العلم – الدكتور يمني طريف الخولى – مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب – 1999

مستقل أو زمان مستقل، بل ثمت فحسب زمانيات مكانية تستلزم زماناً – مكاناً أولياً تنبثق عنه كل الأشياء، ثم يعلي شأن الزمان بوصفه مبدأ تنظيم، فلولاه لكان المكان كتلة صماء، أو بتعبير مجازي يقول المكان جسد الكون و الزمان عقله[2].

أهم أعتراضات كانت على نيوتن في المكان و الزمان هي:
أن ما سماه نيوتن المكان النسبي و الزمن النسبي – و هما موضوع إدراك حسي انساني – هما ما أسماه كانت العلاقات المكانية و الزمنية الأمنكنة و الأزمنة المختلفة التي هي أجزاء المكان الواحد و الزمن الواحد. المكان النسبي و الزمن النسبي (نيوتن) أو العلاقات المكانية و الزمنية (كانت) هما ما جعلهما كانت – في أطار فلسفته النقدية – صورتين قبيليتين للحدوس التجريبية. أن الخلاف الأساسي بين موقف نيوتن و كانت في هذا السياق هو أنه بينما جعل الأول للمكان و الزمن النسبيين وجوداً خارجياً موضوعياً مستقلاً عن أي إدراك إنساني، جعل كانت العلاقات المكانية و الزمنية تصدران عن الذات صدوراً قبلياً. لأسباب سجلها في براهينه على قبلية المكان و حدسيته[4].

يمكن القول أن ما سماه نيوتن المكان المطلق و الزمن المطلق هما المكان الواحد و الزمن الواحدعند كانت. بل وكان يتحدث كانت في مواضع كثيرة من كتبه عن المكان المطلق أو الخالص أو الواحد و الزمن المطلق أو الخالص أو الواحد بلا تميز[4].

أن أهم مميزات نظرية نيوتن في المكان و الزمن أنها فسرت يقين القضيه الرياضيه (و الهندسية بوجه خاص) كما فسرت إمكان تطبيق حقائق الهندسة البحتة على عالم الأشياء الجزئية. فسرت نظرية نيوتن يقين الرياضيات البحتة من حيث أن المكان النيوتني موضوعي و لا نهائي. و ذلك ما يتطلبه المكان الهندسي. فسرت نظرية إمكان التطبيق حقائق الهندسة على العالم المحسوس من حيث أعتبار أن المكان الطبيعي (الفيزيائي) مكان إقليدي[4]. وخلاصة أعتراضاته على المكان و الزمان النيوتني هو:

- العالم المادي عند نيوتن عالم موضوعي مستقل كل الأستقلال عن أي إدراك أنساني.
- تصور المكان و الزمن كشيئين واقعين لهما وجودهما المستقل عنا تصور متناقض، ذلك لأن المكان و الزمن المطلقين بالمعنى النيوتني يعنيان أنهما موجودان و غير موجودين في الواقع

2- الزمان في الفلسفة و العلم – الدكتور يمني طريف الخولى – مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب – 1999

4- كنط و فلسفته النظرية – دكتور محمود زيدان – دار المعارف – الطبعه الثالثه – 1979

- تصادفنا صعوبات في مجال الميتافيزيقا إذا حملنا على المكان و الزمن المطلقين بالمعنى النيوتني صفتي الخلود و اللا نهائية، و هاتان يقررهما نيوتن للمطلقين. إذا تصورنا المكان و الزمن خالدين لا نهائيين فلا سبيل لتصور موجود آخر له نفس الصفتان، و أعظم منهما، و هو الله[4].

الملاحظات على كانت:

كان يعتقد كانت أن علم المنطق قدّ تم و أكتمل على يد أرسطو كنسق من نظريات مطلقة الصدق، و أن ليست مجهودات المناطقة من بعد سوى عرض أفضل لما سبق أن أرسى أرسطو قواعده أو أضافة تعديلات جزئية لتفصيلات لا تزعزع جوهر تلك النظريات. حين يتعرض كانت لنقد نظرية من نظريات نيوتن لا يمس النظريات الفيزيائية في ذاتها بقدر ما يمس تضمناتها الميتافيزيقية. و قدّ نظر كانت الى إقليدس في الهندسة كما نظر الى أرسطو في المنطق و نيوتن في الفيزياء[4].

4- كنط و فلسفته النظرية – دكتور محمود زيدان – دار المعارف – الطبعه الثالثه – 1979

المفهوم الفلسفي للمكان

بواسطة الحس الخارجي (هو أحد خصائص الذهن)، نتصور الموضوعات بوصفها خارجة عنّا و بوصفها جميعها في المكان. و كما أن المكان لا يمكنه أن يكون شيئاً فينا، كذلك فإن الزمان لا يمكنه أن يحدس خارجياً[3].

حتى يمكنني أن أتصور الأشياء بعضها خارج و الى جانب بعض، و بالتالي لا من حيث هي متميزة و حسب، بل من حيث هي قائمة في مواضع مختلفة أيضاً، يجب أن يكون تصور المكان في الأساس سلفاً. و من ثمّ فإن تصور المكان لا يمكن أن يستمد بالتجربة من علاقات الظاهرات الخارجية، بل إن التجربة الخارجية عينها ليست ممكنة إلا بواسطة ذلك التصور[3].

المكان هو تصور ضروري قبلي يشكل أساساً لجميع الحدوس الخارجية و لا يمكن البته أن نتصور أن ليس هناك مكان رغم أنه يمكننا أن نفكر أن ليس ثمت مواضيع في المكان. فهو يعدّ بمثابة شرط لإمكان الظاهرات، لا بمثابة تعين تابع لها، و هو تصور قبلي يشكل أساساً للظاهرات الخارجية بالضرورة[3].

المكان ليس أفهوماً سياقياً، أو كما يقال أفهوماً عاماً لعلاقة الأشياء بعامة، بل هو حدس محض. ذلك أنه لا يمكن بدءاً أن نتصور مكان واحد، و عندما نتكلم عن عدة أمكنة فإننا لا نفهم بذلك إلا أجزاء المكان الواحد بعينه. و هذه الأجزاء لا يمكنها أن تكون سابقة على المكان الوحيد الذي يضمها جميعاً كما لو كانت عناصره (التي يمكن تركيبها منها)، بل يمكنها أن تفكر إلا به. فهو ماهوياً واحد، و يستند المتنوع الذي فيه، و بالتالي الأفهوم العام للأمكنة بعامة، الى حدود حصرية فيه و حسب. و ينجم عن ذلك من ثمّ أن الحدس القبلي به (الذي ليس أمپيرياً) يوجد في أساس جميع أفاهيمها. و عليه فإن جميع المبادئ الهندسية مثال "مجموع زاويتين في المثلث هو أكبر من الثالثة" ليست مستنتجة البته من أفاهيم عامة للخط و للمثلث، بل من الحدس، و ذلك قبلياً و بيقين ضروري[3].

المكان يتصور بوصفه كماً لا متناهياً معطي. و الحال، إنه يجب أن نفكر حقاً أفهوم بوصفه تصوراً متضمناً في كثرة لا متناهية من تنوع التصورات الممكنة (من حيث طابعها المشترك). و لأن جميع

3- نقد العقل المحض – عمّا نوئيل كنط – ترجمة موسى وهبة.

أجزاء المكان توجد معاً في اللا متناهي، فالتصور الأصلي للمكان هو إذن حدس قبلي و ليس أفهوماً[3].

الهندسة هي علم يعين خصائص المكان تأليفياً، و مع ذلك، قبلياً. فماذا يجب أن يكون إذن تصور المكان حتى تكون مثل تلك المعرفة ممكنة به؟ يجب أصلاً أن يكون المكان حدساً، لأنه من مجرد أفهوم لا يمكن أن نستمدّ أي قضية تتخطى الأفهوم، و هو أمر حاصل في الهندسة مع ذلك. لكن، على ذلك الحدس أن يقوم فينا قبلياً، أي قبل إدراك الموضوع، و عليه بالتالي أن يكون حدساً محضاً أمپيريا. ذلك أن القضايا الهندسية يقينية كلها، أعني، أنها مربوطة بوعي لضرورتها، و على سبيل المثال "المكان ذو أبعاد ثلاثة و حسب"[3].

المكان لا يمثل لا خاصية للأشياء في ذاتها و لا هذه الأشياء في علاقاتها فيما بينها. المكان ليس سوى صورة جميع ظاهرات الحواس الخارجية. لا يمكننا إذن الكلام عن المكان و الأشياء الممتدة الخ، إلا من وجهة نظر الإنسان. وإذا خرجنا من الشرط الذاتي الذي من دونه لن نقدر على أن نتلقى حدساً خارجياً، أعني أن نتأثر بالموضوعات، فلن يعني تصور المكان شيئاً. و لا يربط هذا المحمول بالأشياء، إلا من حيث تبدو لنا، اي من حيث هي موضوعات للحساسية. و الصورة الثابتة لقدرة التلقي، التي نسميها حساسيه، هي الشرط الضروري لجميع العلاقات التي بها نحدس الموضوعات بوصفها خارجية. فإذا ما جردناها من هذه الموضوعات فستكون حدساً محضاً يحمل أسم المكان. و حيث إنه لا يسعنا أن نجعل من شروط الحساسية الخاصة شروطاً لإمكان الأشياء، بل فقط شروطاً لظاهراتها، فإنه يمكننا القول إن المكان يتضمن جميع الأشياء التي يمكن أن تظهر لنا خارجياً[3].

القضية هذه: "كلّ الأشياء متجاورة في المكان"، تصدق ضمن هذه الحدود حصرياً: أن تؤخذ الأشياء بوصفها موضوعاً لحدسنا الحسيّ. فإذا أضفت إذن الشرط الى الأفهوم هنا و قلت: " جميع الأشياء، بما هي ظاهرات خارجية، متجاورة في المكان"، فستصدق هذه القاعدة كلياً و بلا حصر[3].

3- نقد العقل المحض – عمّا نوئيل كنط – ترجمة موسى وهبة.

النظرة الفلسفية و الفيزيائية للزمان[1]

الزمان من وجهة نظر أرسطو وأفلاطون

الزمان من وجهة نظر أرسطو هو مقدار الحركة من جهة المتقدم و المتأخر.

يسوقنا هذا التعريف الى هذه الأستنتاجات:

- أرتباط الزمان بالحركة.
- أنه مقدار الحركة و ليس الحركة نفسها.
- ولو أنه مقدار الحركة و مقياسها، فإنه في الآن نفسه يقاس هو ذاته بالحركة.
- أن هذه الحركة التي يقاس بها هي الحركة العامة للكون.
- أنه مصدر الكون و الفساد.
- أنه ليس متوقفاً و لا مرتبطاً بالنفس الإنسانية، و إن كان مرتبطاً بنفس حية هي النفس الكلية. و ليس لنا أن نزعم هنا أن النفس الكلية يمكن أن تفسر أسطورياً على أنها النفس الإنسانية مرفوعة الى درجة أقوى، نظراً الى أن الكون في نظر الروح اليونانية عامة كائن حي أكبر. و من هنا لا يمكن إلا أن يقال أن نظرة الروح اليونانية عامة الى الزمان نظرة موضوعية، لا ذاتية.
- أن الزمان نُظر إليه هنا نظرة كمية.

يقيم أرسطو برهان على أن الحركة ليست الزمان وإن الزمان ليس الحركة على أن الزمان كلى عام، و لا يتوقف. و يضيف الى هذا البرهان هو إن كل تغير إما أسرع و إما أبطأ، بينما الزمان ليس كذلك، لأن البطء و السرعة يحددان الزمان.

كذلك يربط أرسطو الزمان بالمكان حين يقول إن الحركة خاضعة للمقدار الكمي، و كل مقدار كمي متصل، فالحركة إذن متصلة. فإذا كان الزمان سائراً وفقاً للحركة، فهو إذن متصل مثلها. و نحن نميز في المتحرك بين نقطة بدء و نقطة وصول، أي نفرق بين متقدم و متأخرفي المكان. و الحركة كما قلنا خاضعة للمكان، فإذن نستطيع أن نميز فيها بين متقدم و متأخر.

1-مصدر هذا البحث: الزمان الوجودي – عبد الرحمن بدوي - دار الثقافة بيروت لبنان – 1973

يشرح أرسطو هذا التعريف فيقول: إن الزمان ليس إذن حركة، و لكنه لا يقوم إلا من جهة أن الحركة تتضمن المقدار (العدد). و الدليل على هذا أن العدد يسمح لنا بالتمييز بين الأكثر و الأقلّ، و الزمان يسمح بالتمييز بين الأكثر و الأقلّ في الحركة. فالزمان إذن نوع من العدد. و لكن العدد يفهم بمعنيين: فهناك العدد بمعنى المعدود و القابل للعدّ، و هناك العدد كوسيلة للعدّ. و وسيلة العدّ و الشئ متمايزان. و هذه التفرقة يمكن أن تصاغ على نحو حديث بأن نقول إن ثمت نوعين من العدد: عدداً موضوعياً ، و هو الأشياء القابلة لأن تعدّ، و عدداً ذاتياً هو الفكرة التي يكونها العقل و بها يعدّ الأشياء القابلة للعدّ.

الزمان عند أفلاطون هو الصورة السرمدية السائرة تبعاً للمقدار، للسرمدية الباقية في الوحدة.
إن الأشياء السرمدية ليست في الزمان، لأن الزمان لا يشملها و لا يقيس وجودها. و الدليل على هذا أن الزمان ليس له أي أثر فيها، و ما هذا إلا لأنها ليست فيه. كذلك الحال أيضاً في اللا موجودات، و يقصد بها أرسطو النسب الرياضية خصوصاً، مثل قابلية قياس القطر مع الضلع. فهذه ايضاً كالأشياء السرمدية ليست في الزمان، لأنها لا تتضمن حركة أو سكوناً.

النتيجه إن كلّ ما هو خاضع للكون و الفساد، و على العموم كلّ ما يوجد تارة و لا يوجد أخرى هو بالضرورة في الزمان، لأن ثمت زمناً أكبر يفوق وجودها. أما ما لا يخضع للحركة، فلا يوجد في الزمان، و هذا واضح من كون الزمان مرتبطاً بالحركة على النحو الذي رأيناه، فحيث لا حركة لا زمان. ففي أي شئ يوجد إذن؟ لابد أن نقول إنه يوجد في الآن!

فكرة - الآن – فكرة غامضة هل نجعل الوجود الحقيقي للزمان في الآن؟ أم ندع الآن خارج الزمان؟ الوضع الأول أقرب، و هذا ما عبر عنه أبي البركات البغدادي في قوله: إن الآن هو الذي يوجد من الزمان، و لا يوجد زمان البته، أي لا يقرّ منه شئ يتجدد بآنيين، بل الموجود آن بعد آن على التوالي. كذلك يقول: الزمان يلقي الموجود بالآن، فلولا الآن لما دخل الزمان في الوجود على الوجه الذي دخله.

الزمان من وجهة نظر نيوتن

قسّم نيوتن الزمان الى زمانين: مطلق، و نسبي. الزمان المطلق هو الزمان الحقيقي الرياضي، و هو قائم بذاته مستقل بطبيعته، في غير نسبة الى أي شئ خارجي، و يسيل بأطراد و رتوب، و يسمى أيضاً بأسم المدة، و على العكس من هذا نجد الزمان النسبي ظاهرياً عامياً، و هو مقياس حسيّ خارجي لأية مدة بواسطة الحركة، و هو الزمان المستعمل في الحياة العادية عل هيئة ساعات و أيام و شهور و أعوام، و قدّ يكون دقيقاً، و قدّ لا يكون متساوياً مطرداً. و هذا الزمان الثاني يستخدم في الفلك مقياساً لحركة الأجرام السماوية، لأن زمان الفلكيين مرتبط بحركة، بينما الزمان المطلق كما قلنا لا يرتبط بأية حركة. و هذا الزمان الأخير توجد فيه معية مطلقة، بمعنى أن من الممكن أن تقع حادثتان معاً و في نفس الوقت بالنسبة الى الزمان المطلق و لو كان أحداهما مرتبط بالشمس مثلاً، و الآخر بعطارد، دون أن يعني نيوتن ببيان: هل هذه المعية المطلقة بالنسبة الى نظامين في سكون نسبي فيما بينهما، أو متحركين الواحد قبالة الآخرين؟ و هي المشكلة التي أثارتها نظريةالنسبية فيما بعد.

الزمان من وجهة نظر ليبنتس

الزمان من وجهة نظر ليبنتس هو نظام التوالي، و هو إذن لا يقوم إلا في النسب الموجودة بين أشياء تتوالى أي أنه تابع للأشياء، و ليس سابقاً عليها. لقد خطا ليبنتس بهذا التعريف الجديد للزمان خطوة واسعة في سبيل التجريد و الذاتية، فإنه مع ذلك ظلّ موضوعياً الى حدّ كبير. إذ هو ينظر الى هذه النسب، نسب توالي، على أنها نسب حقيقيه بين حدود حقيقية، هي لحظات متتالية، تمر بها في الواقع الأشياء المستمرة ذوات المدة. و إذا كان مع ذلك قدّ سار في أتجاه الذاتية بأن ميز بين الزمان و بين المدة كما فرق بين المكان و بين الأمتداد على أساس أن المدة و الأمتداد صفات للأشياء، بينما الزمان و المكان ينظر إليهما على أنهما خارج الأشياء يفيدان في قياسها، و بالتالي تكون المدة و الأمتداد أشياء خارجية موضوعية، بينما الزمان و المكان أقرب الى الذاتية. لم ينعت ليبنتس الزمان و المكان بأنهما ذاتيان و لا وجود لهما في الموضوعات الخارجية، بل أكتفى بأن قال إنهما مطلقان متخيلان.

الزمان من وجهة نظر كانت

عرض كانت الزمان على قسمين عرض ميتافيزيقي، و آخر متعال.

العرض الميتافيزيقي يتضمن خمس حجج يمكن ان تقسم الى قسمين:

يبرّهن في القسم الأول على أن الزمان ليس أمتثالاً تجريبياً، بل هو قبلي. و يبرّهن في القسم الثاني على أن الزمان عيان، و ليس تصوراً.

إن الزمان ضروري يقوم عليه كلّ عيان، و يمكن أن يدرك مستقلاً عن الظواهر. و النتيجة لهذا أن الزمان إذن قبلي، و الدليل على هذا أننا لا نستطيع أن نستبعد الزمان من الظواهر عامة، مع أننا نستطيع أن نفهم الزمان خالياً من الظواهر. إذن الزمان لا يقوم على الظواهر، بل الظاهر هي التي تقوم على الزمان، و بغير الزمان لا يتصور تحقق الظواهر، أي ان الزمان إذن قبلي ضروري لكلّ حركة حسية.

العيان عند كانت هو الأمتثال الجزئي، بينما التصور هو الأمتثال الكلي، أي في حالة العيان أمتثال موضوعاً جزئياً، و في حالة التصور أمتثال الصفات المشتركة بين عدة موضوعات. و العيان أسبق من التصور، لأنه مباشر يتصل بموضوعه مباشرة عن طريق الحس، بينما التصور يتكون بواسطة العيانات، و لذا ليس على صلة مباشرة بالموضوعات. و الزمان العيان بهذا المعنى، أي بمعنى أنه أمتثال موضوع جزئي. أما أمتثال الموضوعات المتزمنة بالزمان، فهذا هو الزمانية. و يبرّهن كانت على هذا بحجتين: الأولى أن الزمان واحد، و ليس كثيراً. و الثانية أن الزمان لا متناه. يقول كانت: أن الزمان ليس تصوراً كلياً، و لكنه شكل خالص للعيان الحسيّ. و ذلك لأن المرء لا يستطيع أن يتصور غير زمان واحد و وحيد، أما الأزمنة فليست إلا أجزاء لهذا الزمان الواحد، و إذا كان الزمان واحداً، فهو لا يقبل أن يكون ذا تصور، بل ذا عيان، ما دام التصور يتركب من أمتثال عدة أشياء، بينما العيان من أمتثال شئ جزئي واحد.

أمتثال اللا تناهي في الزمان ليس تصورا، بل عياناً، و الزمان أمتثال اللا تناهي، إذن الزمان عيان و ليس تصوراً. أثبت كانت أن الزمان عيان، و بهذا أيضاً فرق بين الزمان و الزمانية. و النتيجة أن

الزمان أصيل و الزمانية مشتقة و متفرعة على الزمان. هذا العيان الخالص للزمان هو شرط كل معرفة قبلية لدينا عن الزمان بما في ذلك البديهيات العامة.

النتيجه:

- أن الزمان ليس شيئاً موجوداً بذاته قائماً مستقلاً، و ليس شيئاً باطنياً في الأشياء كصفة موضوعية لها، و هو لا يبقى حين نجرد كلّ الشروط الموضوعية لأمتثاله. لأنه لو كان قائماً بذاته، لكان شيئاً واقعياً و غير واقعي معاً.
- الزمان عند كانت شكل من شكول الحساسيه الإنسانية، أي لا يرجع إلا إليها، فلا يمكن أن تظهر الأشياء لنا في التجربة الحسية إلا على هيئة الزمان.
- الزمان هو الشرط الشكلي القبلي لكلّ الظواهر أياً كانت. و في هذا يزيد الزمان عن المكان: إذ المكان، بوصفه الشكل الخالص لكل عيان خارجي قدّ حدّد على هذا النحو بما هو خارجي فحسب، فهو إذن شرط قبلي للظواهر الخارجية و حدها دون غيرها. أما الزمان فإنه شكل خالص لكلّ عيان باطن، و خارجي معاً.
- لا ينكر كانت موضوعية الزمان، بوصفه الشرط لكلّ تجاربنا، و إنما الذي ينكره هو واقعيته المطلقة.
- المثالية المتعالية للزمان هي وجوده (أي الزمان) في كل تجربة حسية و أمتثال، دون أن يكون شيئاً موجوداً في الخارج كوجود الشئ في ذاته.
- يقوم الزمان على التوالي، بينما المكان على التتالي. التقابل بين المكان و الزمان هو على النحو التالي[2]:

المكان	**الزمان**
النقطة	اللحظة
الأمتداد	الديمومه
التجاور	التعاقب
التتالي	التوالي
السكونية	الحركية
الثبات	التغير
الكينونة	الصيرورة

2- الزمان في الفلسفة و العلم – الدكتور يمني طريف الخولى – مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب – 1999

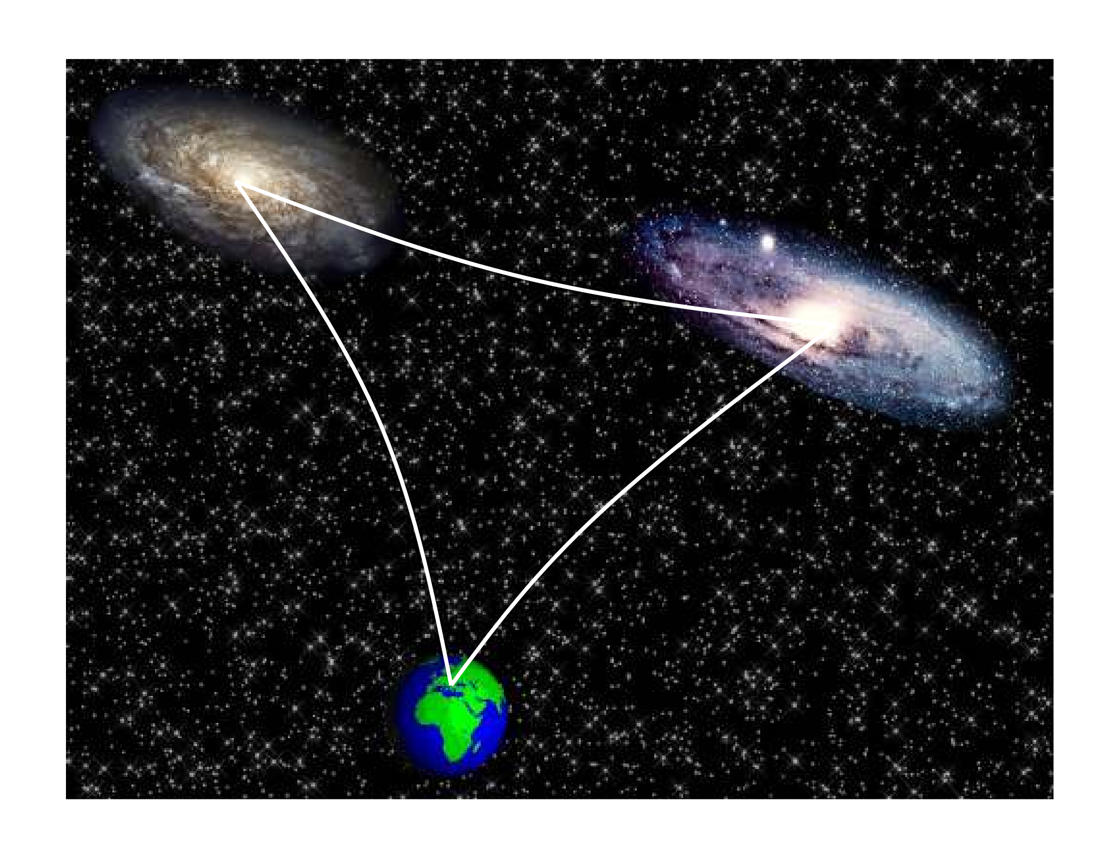
الزمان في النظريه النسبيه

أهم نتائج النظريه النسبيه: أهمها و أولها هو أن الزمان نسبي. و ثانيها أن للمكان إنحناء. و ثالثها أن سرعة الضوء هي أكبر سرعة ممكنة. المسئلة الرئيسية في هذه النظرية هي أنه ليس من الممكن أن يفصل بين الزمان و المكان إطلاقاً، بل يكونان كلاً متصلاً يسمى متصل الزمان و المكان (الزمكان)، و الزمان في هذه الحالة إذن بُعدّ رابع يضاف الى أبعاد المكان الثلاثة. و بهذا المعنى يقول منكوفسكي: إن الفصل بين المكان و الزمان قدّ صار وهماً لا أساس له، و إن إندماجهما على نحو ما هو وحده الذي يتسم بسيماء الحقيقة.

الفارق القديم الذي كان يقال بوجوده بين الزمان و المكان، ألا وهو أن الزمان ذو أتجاه و لا يقبل الإعادة، بينما المكان متساوي الأتجاه، قدّ سقط على أساس هذه النظرية. إذ أن فكرة الأتجاه الواحد التي كانت تعزى الى الزمان قدّ صدرت عن تصور زمان مطلق تتأثر به الظواهر و الأشياء المتحركة فيه، دون أن يتأثر هو بها أدنى تأثير، أما إذا قلنا بأن الزمان نسبي، يتوقف على إطار الإشارة (مرجع الأشاره الضوئيه) و الإطارات متعددة تبعاً لأختلاف الأجرام في الكون في حركتها بعضها بالنسبة الى بعض، فليس ثمت مجال للتحدث عن أتجاه واحد في متصل الزمان و المكان هو أتجاه زمني، و العالم الفيزيائي إذن ليس ذا أتجاه واحد مستمر كأتجاه التاريخ، مادام هذا ذا أتجاه واحد، بينما ذلك العالم بوصفه كُلاً له أتجاهات زمنية عدة. و الفارق واضح بين كلتا النظرتين الى الزمان: فالزمان التاريخي، أعني الزمان ذو الأتجاه الواحد، توجد فيه الحوادث إما على هيئة التوالى أو على هيئة المعية، و يمكن أن يُدرك مباشرة بالحس و الذاكرة، و المدة فيه ذات وحدة جوهرية في الأستمرار الحسي لكل الحاضرات المتوالية، أما الزمان الفيزيائي الذي تقول به النسبية، فلا نستطيع أن نحدد فيه الوضع الزماني و المكاني للحوادث من حيث التوالى أو المعية إلا إذا إتفقنا أولاً على وضع معايير للمعية و التوالي، معايير تتوقف على إطارات الإشارة الزمنية التي تجري فيها تلك الحوادث، و من هنا فليس في الوسع أن نحدد، بطريقة واحدة سابقة على وضع معايير معينة، التوالى أو المعية بين الحوادث، و المساواة في المضي الزمني لا تتحدد في حالة الزمان الفيزيائي بطريقة عامة سابقة، بل لابد من وضع مقياس تحدد به المساواة في المضي الزمني. و من هذا نرى في النهاية أن المقاييس التي نتخذها في قياس المدد و الأطوال تتوقف عل وجهة نظر الراصد و إطار الإشارة الذي يوجد فيه.

الزمان في نظرية الكمّ

وضح هيزنبرج في نظرية الكمّ، أن الراصد ذو أثر أكبر في الموضع المرصود، الى درجة أنه من المستحيل أن نجد قياساً دقيقاً كل الدقة، بل لابد أن يكون ثمت هامش للا تعين لا يمكن أزالته. و على هذا، فبعد أن كانت الميكانيكا القديمة (أي تلك التي سبقت نظرية الكمّ عند هيزنبرج، بما في ذلك الميكانيكا النيوتنية بعد إدخال تعديلات نظرية النسبية فيها) تحسب أن مقياس الزمان يمكن أن ينطبق بدقة تزداد كلما أزداد تحديدنا للظروف التي توجد بها ظاهرة فيزيائية، قالت الميكانيكا الكمية: إننا لا يمكن أن نصل الى دقة مطلقة، بل يظل ثمت مجال للا تعين ليس في الوسع أختراقه، و ذلك ناتج من رد الفعل الذي يحدثه الراصد ضد الظاهرة المرصودة. و فضلاً عن هذا لا تعترف بأن كل الظواهر قابلة للدخول في إطارات الزمان و المكان، إذ بينت نسب هيزنبرج أن الظواهر الذرية لا تخضع بإحكام و دقة مطلقة لقواعد علم الحركة (للعالم فوق الذري)، بل ثمت إنحراف دائماً عنها تبعاً لثابت بلانك. و تبعاً فإن التصويرات الزمانية المكانية في الفيزياء القديمة (الى ما فبل نظرية الكمّ) لا تستطيع أن تتمثل بالدقة العمليات المجهرية، أعني تلك التي لا تدرك إلا بالمجهر.




الهندسة
الهذلولية

الهندسه الهذلوليه

لا تستطرق الهندسة للأشعة الضوئية، لكن مسير شعاع ضوئي يمكن أن يكون الطبيعه الماديّة لأصطلاح هندسي غير معرّف كالخط. يذكر هرمان وايل (Hermann Werl) أن الذهن الرياضي حرّ و ملزم، وهناك أحساس عند الرياضيين (علماء الرياضيات) و هو أنهم يتمتعون بحرية تعريف الأصطلاحات و وضع المسلمات، لكن المسئلة هي مدى توفقهم بأرضاء زملائهم الرياضيين بنتائج أحساساتهم و تخيلاتهم. لا يمكن الوقوف أمام هذه الأحساسات و الكثير من البنى الرياضيه هي حصيلة جهد و مساعي الأسره الرياضية بأكملها، و قدّ أكدوا على أستلزامها.

لا تخلو دنيا الرياضيات من الجدل حول النظمّ الموضوعاتيه على رغم النتائج المثمره التي جاءت بها هذه النظمّ، لقد نالت مسلمات كانتور في المجموعات اللا متناهيه جدلاً و رفضاً من أبرز الرياضيين (أمثال وايل و برائور و بيشاب) و منهم من رفض جميع هذه المسلمات. إذا كانت هذه المسلمات هي أحكام صوريه لا معنى لها فلماذا نالت موافقة و مخالفة الكثيرين؟ هل هناك أعتراض على قواعد لعبة الشطرنج؟ النظره الصوريه على الرياضيات هي إنها لعبة صورية، هذه النظرة هي منفذ للهروب من المسئلة الفلسفيه و النفسيه المعقده لماهيات الأبداعات و الأكتشافات الرياضيه. في الحقيقه عندما يثقّ الرياضي بوجود شئ ماذا يقول؟ عندما أكتشف الفيثاغورثيون بأن وتر المثلث القائم الزاويه المتساوي الساقين لا يمكن قياسه بنفس وحدة القياس التي يقاس بها الساقين عمدوا على كتمان أكتشافهم هذا و أطلقوا التسمية على كهذا الطول بالأصمّ. أما نحن اليوم فلسنا مستائين من الأعداد الصماء كالعدد $\sqrt{2}$ بل ذهبنا الى أبعد من هذا بقبولنا الأعداد الخيالية التي جاء بها كاردان (Cardan) و ذلك من خلال إدخاله مفهوم $i=\sqrt{-1}$ دنيا الرياضيات. من المواضيع الأصوليه (fundamentalist) في فلسفة الرياضيات لكرونكر (Kroncker) مقولته: الله الذي خلق الأعداد الصحيحة، و بقية الأعداد هي من خلق الإنسان.

أكثر الرياضيين هم متفقون اليوم على مسلمات كانتور في المجموعات و يعتبرونها أساس الرياضيات.

هناك سرّ في الرياضيات و هو إذا كانت الأبداعات الرياضيه هي حصيلة أوهام و تخيلات الرياضيين، فكيف يمكن لبعضها أن تتخذ طابع فيزيائع عملي؟ كالطابع العملي الذي أتخذته قوانين الحركه المداريه المستلهمة من المخروطات (كالشلجمي) و المعتمدة على مسلّمات الهندسة التي وضعها اليونانيون، و كانت نتائجها هبوط الإنسان على سطح القمر، لن يتصوروا بأن مسلماتهم هذه ستأخذ طابع عملي في غزو الفضاء!
الهدف من طرح هذا الموضوع هو ليس لإيذائكم و إنما لنبين لكم أن الرياضيات حيّة و دائماً في تغير و لاتنتهي.

ندخل الى بحث الهندسه الهذلوليه، بتعريفها و أهم مفاهيما و قضاياها.

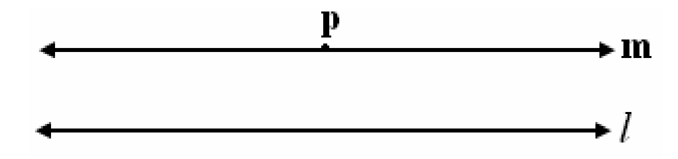
كل هندسه غير إقليديه فهي هندسه لا إقليديه، هناك هندسات لا إقليديه عديده لكن ما يخصّ هذا البحث هي الهندسه التي كشفها كلّ من لوباتشفسكي و بوليائي (Bolyai) و غاوس و تعرف هذه الهندسه، بالهندسه الهذلوليه أو الهندسه الزائديه Hyperbolic geometry أو هندسة لوباتشفسكي.

الهندسه الهذلوليه هي الهندسة المبنية على مسلمات الهندسة المحايده (neutral geometry)، و تستبدل مسلمة هيلبرت في التوازي، بمسلمة التوازي في الهندسة الهذلوليه.

مسلمة التوازي في الهندسه الهذلوليه: من نقطه P لا على المستقيم l على الأقلّ يمرّ مستقيمان من P يوازيان المستقيم l

تسعى الهندسه المحايده على إثبات القضايا الهندسية مستغنية عن مسلمة التوازي. مستعينة بالمسلمات الأربعة الأولى للهندسة الإقليديه، كمحاوله لفرز القضايا المعتمدة و الغير معتمدة على مسلمة التوازي. مسلمات هيلبرت هي أكثر شمولية من مسلمات إقليدس و تظهر مسلمة التوازي في مسلمات هيلبرت بهذه الصيغة:

لكلّ مستقيم كالمستقيم l ولأي نقطه لا على المستقيم l كالنقطه P على الأكثر هناك مستقيم واحد هو m يمرّ من P و يوازي l.



في الهندسه الإقليديه لا يمكن تقسيم الزاويه بالفرجال و المسطره الغير مدرجه الى ثلاث زوايا متساويه، كذلك في الهندسه الهذلوليه هذا التقسيم غير ممكن، لا يمكن تقسيم قطعة مستقيم بهذا الشرط الى ثلاث أقسام متساويه في الهندسه الهذلوليه. في الهندسه الإقليديه لا يمكن رسم مربع بالفرجال و المسطره الغير مدرجه مساحته تساوي مساحة دائره معلومه، لكن هذا الرسم بهذا الشرط ممكن في الهندسه الهذلوليه.

العجيب في هذه الهندسه هو أمكانية وجود حدّ لمساحة المثلث فيها و لا حدّ لطول أضلاع هذا المثلث!

الهندسه في الفضاء الماديّ

منطقياً يجب أن تكون الهندسه الهذلوليه ملازمة للهندسه الإقليديه، لكن يطرح هذا الألتزام، السؤال هذا، و هو أن الهندسه الهذلوليه هي نوع من أنواع التسليه الفكريه بينما الهندسه الإقليديه هي التي تعرّف العالم الذي نعيش فيه و خير دليل على ذلك الهندسه المعمارية في مجال المسافات و المساحات القصيرة، فكيف تدخل هذه الهندسة المجال العملي؟ تفقد الهندسة الإقليدية مصداقيتها في المسافات الكبيرة كالمسافات بين الكواكب البعيدة جداً، مثال على ذلك، إن كان الخط أو المستقيم هو عبارة عن مسير شعاع ضوئي، في حالة وجود ثلاثة منابع ضوئيه بعيدة جداً عن بعضها، تشكل الفواصل بين هذه المنابع مثلث (مادي)، إذا أردنا أن نعرف بأن مجموع زوايا هذا المثلث 180 درجة أم لا، فالأخطاء النتاتجة عن القياسات تعوق عن التحقق من إثبات كهذه التجارب، و لا توجد أي تجربه فيزيائيه تبرّهن على إقليدية الفضاء، بينما يمكن إثبات لا إقليدية الفضاء.

يجب الشك في تعريف الخط (أو المستقيم). هل من الممكن أن يسير الضوء في مسير منحن؟ يعتقد أنشتاين بعدم التفكيك بين المكان و الزمان، و هندسة الفضاء - الزمان متأثرة بالمادة الموجودة في الفضاء حيث ينحني الضوء عند مروره قرب كتلة ضخمة.

أصبح الفضاء ليس كما يتصوره نيوتن عبارة عن صندوق فارغ لا يتأثر بالصخور الموجودة فيه، و المسئلة أعقد مما يتصوره إقليدس و لوباتشفسكي فكلا هاتين الهندستين غير كافيتين لكهذا الفضاء! لا يقلل هذا من شأن الهندسة اللا إقليدية فأنشتاين يقول: أجلّ كل التقدير لتعابير هذه الهندسة (اللا إقليديه) فإن لم أتعرف عليها لما تمكنت من طرح نظرية النسبيه.

يطرح بوانكره سؤالاً و هو: أي الهندسات صحيحة؟ إذا كانت الهندسة علم عملي فهي غير دقيقة و دائماً في تغير ... بينما مسلمات الهندسة هي ليست نتائج أستنتاجات و لا حقائق تجريبية، و السؤال هل الهندسة الإقليدية صحيحة؟ جوابه كجواب هذه الأسئلة، هل النظام المتري في الأوزان هو الصحيح و النظام القديم غلط؟ أم جواب السؤال، هل الإحداثيات الكارتيزية هي الصحيحة و الإحداثيات القطبية غلط؟ إذن، أي هندسه هي ليست أصحّ من الهندسة الأخرى، لكن ممكن أن تكون هي الهندسة المناسبه.

في الفلسفه التقليديه (conventionalism) ينقسم العلماء و الفلاسفة الى قسمان: القسم الأول وهم نيوتن و راسل و وايتهد يعتقدون بمترية (metric) قياسيه ذاتيه، و القسم الآخر و هم ريمان و بوانكره و أنشتاين يعتقدون بأن هذه المترية هي تقليديه.

بعض مفاهيم و قضايا الهندسة الهذلولية

رباعي أضلاع ساكري Saccheri quadrilateral

أستعان ساكري برباعي أضلاع ليمكنه من إثبات مسلمة التوازي لإقليدس، هذا الرباعي الأضلاع متكون من عمودين متساويين على نهايتي مستقيم و هناك ثلاثة حالات للزاويتين الأخرتين:

الحالة الأولى: هذه الزوايتان قائمتان

الحالة الثانيه: هذه الزاويتان منفرجتان

الحالة الثالثه: هذه الزاويتان حآدتان

$\angle A = \angle B \quad AC = BD$

لإثبات الحاله الأولى وهي ما تنصّ عليه الهندسه الإقليديه سعى ساكري ليبرهن على التناقض في الحالتين الأخرتين، استطاع أن يبرّهن على التناقض في الحاله الثانيه لكن ما استطاع أن يبرّهن على التناقض في الحالة الثالثه. عدم إمكان إثبات تناقض في الحالة الثالثة جعل هذا الرباعي أن يأخذ مكانة في الهندسه الهذلوليه لكن لم يشهد ساكري هذه المكانة لرباعيّه.

رباعي أضلاع لامبرت Lambert quadrilateral

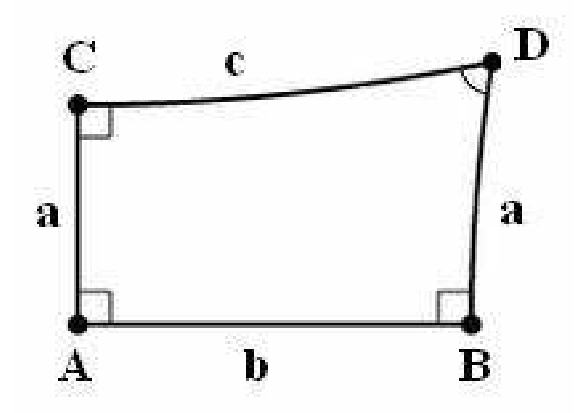
رباعي لامبرت كرباعي ساكري لكن متكون من ثلاثة زوايا قائمه و زاوية حآدة. أستطاع لامبرت من خلال هذا الرباعي أن يبرّهن على الكثير من قضايا الهندسة الهذلولية، لكن على عكس ساكري ما أدعى بوجود تناقض، لكن ما برّهن عليه هو إن وجود الزاوية الحادة في رباعيّه يستلزم وجود تناسب بين مساحة المثلث و نقصان مساحة المثلث.

بعض الروابط المثلثاتيه (المثلثات هنا هذلوليه) لرباعي ساكري و لامبرت:

في رباعي ساكري: $\sinh\frac{c}{2} = \cosh a \sinh\frac{b}{2}$

في رباعي لامبرت: $\sinh c = \cosh a \sinh b$

a و b و c طول الأضلاع



نقصان المساحة

النقصان أو العيب أو Defect في الهندسه الهذلوليه هو الفرق بين 2π و مجموع الزوايا الداخليه للمثلث أي:

$$Defect(\Delta ABC) = \pi - \left(\angle A^r + \angle B^r + \angle C^r\right)$$

في هذه الرابطه الزوايا حسب الراديان،

في الهندسه الهذلوليه هناك عدد ثابت و مثبت k لأي مثلث بحيث:

$$S_{ABC} = k^2 \times Defect(\Delta ABC)$$

إذا كانت الزوايا حسب الدرجه

$$S_{ABC} = \frac{\pi}{180} k^2 \times Defect(\Delta ABC)$$

في هذه الرابطه S_{ABC} مساحة المثلث ABC في الهندسه الهذلوليه.

في الهندسه الهذلوليه الحدّ الأقصى لمساحة المثلث هو πk^2. مساحة المثلث في الهندسه الهذلوليه ليست كما هي في الهندسه الإقليديه حاصل ضرب القاعده في نصف الأرتفاع، و إنما تحسب مساحة المثلث من قانون نقصان المساحة. لذلك يمكن القول عن وجود مثلث ذو مساحه (أقولها بأحتياط) مطلقة في الهندسة الهذلولية.

إذا كان إنحناء السطح K هناك رابطه لغاوس تربط بين مساحة المثلث و مجموع زواياه الداخليه هي:

$$K \times S_{ABC} = \angle A^r + \angle B^r + \angle C^r - \pi$$

نستنتج ثلاث حالات من هذه الرابطة:

الحالة الأولى: $K > 0$ في هذه الحالة مجموع زوايا المثلث اكثر من 180 درجه في هذه الحالة التقوس مثبت يمكن بناء هندسه بيضويه لهذه الحالة.

الحالة الثانيه: $K = 0$ في هذه الحالة مجموع زوايا المثلث 180 درجه و هو نموذج بناء الهندسه الإقليديه ذات الأنحاء الصفر.

الحالة الثالثه: $K < 0$ في هذه الحالة مجموع زوايا المثلث أقل من 180 درجه و التقوس سالب يمكن بناء هندسه هذلوليه لهذه الحالة.

من مقايسة هذه الرابطتين للحالة الثالثه:

$$S_{ABC} = k^2 \times Defect\left(\Delta ABC\right)$$

$$K \times S_{ABC} = \angle A^r + \angle B^r + \angle C^r - \pi$$

إذن $K = -\frac{1}{k^2}$ إذا فرضنا $k = iR$ في هذه الرابطه $i = \sqrt{-1}$ يتضح بأن الصفحة الهذلولية عبارة عن كرة بشعاع أو نصف قطر خيالى أو وهمي.

مساحة الدائره في الهندسة الهذلوليه:

$$S_{\bigcirc} = 4\pi k^2 \sinh \frac{r}{2k}$$

زاوية التوازي

من نقطة P لا على المستقيم L نرسم عمود PQ على المستقيم L هناك فقط مستقيمان على طرفين QP لا يقطعان L هذان المستقيمان متناظران أي:

$\angle XPQ = \angle QPY$ كل من هاتين الزاويتين هي زاويه توازي نقطة P الى المستقيم L.

قانون بوليائي – لباتشفسكي:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{d}{k}}$$

تكتب هذه الزاويه حسب الدرجه هكذا $\Pi(PQ)^\circ$ و تقرأ زاوية توازي النقطه P بالنسبه الى المستقيم L.

k في هذا القانون هو القيمة الثابته التي ظهر تربيعها في قانون نقصان المساحة، و $\tan\frac{\alpha}{2}$ ظل نصف الزاويه α و e ثابت أويلر. يجب التذكير بأن ظل الزاويه في الهندسة الهذلوليه ليس كما هو في الهندسه الإقليديه نسبة الضلع المقابل على الضلع المجاور. كذلك في الصفحه الهذلوليه المستقيمان XP و YP متمايزان و موازيان للمستقيم L.

في حالة $k \to \infty$ تسعى زاوية التوازي نحو $\frac{\pi}{2}$ و هي زاوية التوازي في الهندسه الإقليديه. إذن في حالة سعي الثابت k (ثابت نقصان المساحة) نحو ما لا نهايه تصبح الهندسه الهذلوليه هندسه إقليديه ذات مستقيم واحد يوازي المستقيم L ، و في حالة سعيه نحو الصفر تسعى زاوية التوازي نحو الصفر و تصبح الهندسه الهذلوليه هندسه بيضويه بلا خطوط موازيه.

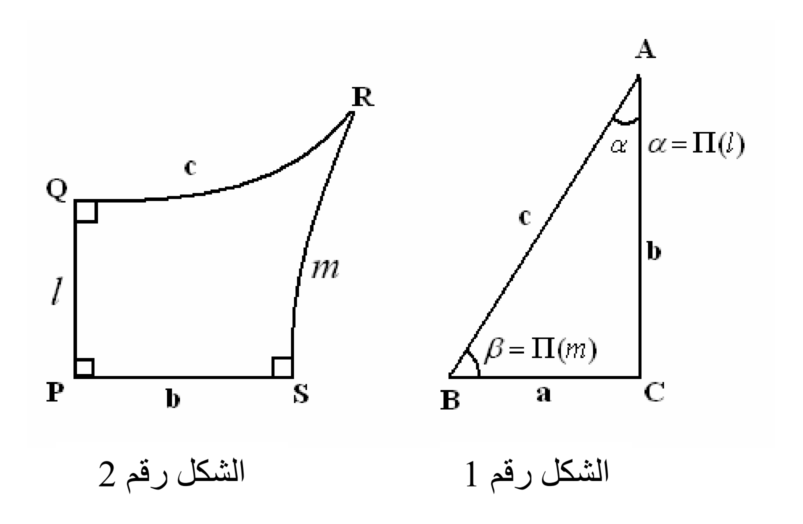
$$k \to \infty \Rightarrow \alpha \to \frac{\pi}{2}$$
$$k \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0$$

عوضاً عن $k \to \infty$ إذا كانت $d \to 0$ في هذه الحالة كذلك تقترب الهندسه الهذلوليه من الهندسه الإقليديه، لذلك إذا كانت الأبعاد صغيرة تصدق روابط الهندسه الإقليديه في الهندسه الهذلوليه، حتى إذا

كانت رؤس المثلث ثلاث كواكب بعيدة بينما طول أضلاع هذا المثلث بالقياس الى k صغيرة يبقى الفضاء ظاهره و أبعاده تقريباً إقليديه.

قضية إنجل Engel Theorem

وجود المثلث القائم الزاويه مع المعامل المرسومة عليه في الشكل رقم 1 إذن و فقط إذن وجود رباعي أضلاع لامبرت مع المعامل المرسومة عليه في الشكل رقم 2



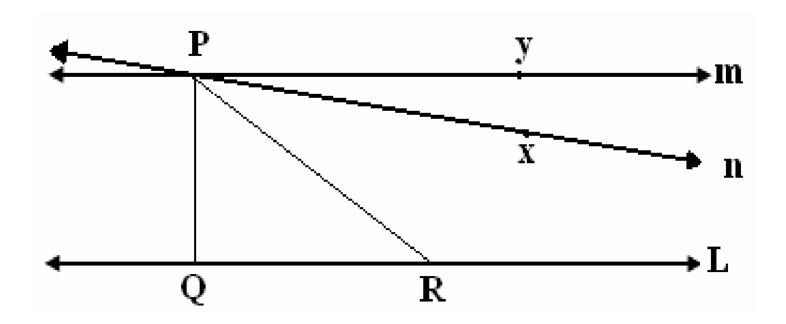
الشكل رقم 2 الشكل رقم 1

نذكر هذه القضيه هنا بلا برهان و يمكن مشاهدة برهان هذه القضيه في المصادر، ذكرناها هنا فقط للتذكيربوجود أستلزام منطقي بين عناصر هذه الهندسه.

بعض قضايا الهندسة الهذلولية

من خلال هذه القضايا سنتعرف على كيفية الأستعانة بمسلمة التوازي في هذه الهندسة الهذلولية لإثبات قضايا هذه الهندسة، قضايا لا يمكن إثباتها و لا تحقيقها في الهندسة الإقليدية، لكن من خلال هذه المسلمة يمكن إقامة برهان على هذه القضايا و إعطائها بعداً عملياً في الفضاء الهذلولي. هذه القضايا هي:

القضيه1: *يوجد مثلث مجموع زواياه أقل من 180 درجه*



البرهان: نفرض ان p نقطه لا على المستقيم L استناداً على مسلمة التوازي في الهندسه الهذلوليه نرسم مستقيمان موازيان للخط L من النقطه p نرمز لهما m و n

$\angle QRP < \angle xpy$: ننتخب R بحيث

$\angle QPR < \angle QPx$: لأن المستقيم PR داخل الزاويه QPx

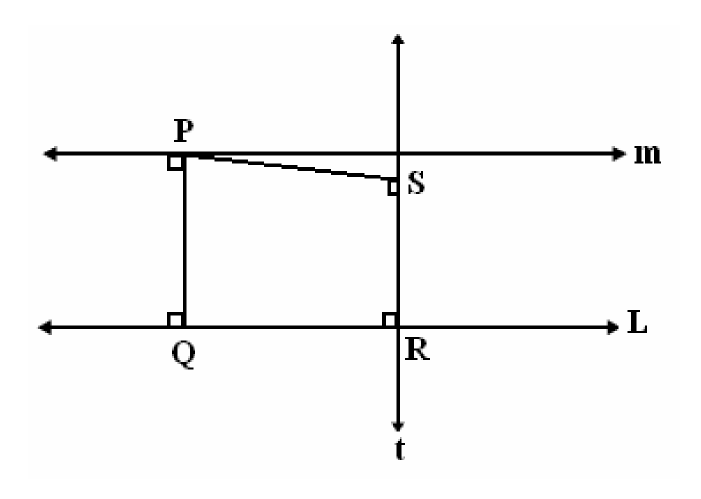
$$\angle QPR + \angle QPx < \angle xpy + \angle QPx = 90^{\circ}$$
$$\angle QPR + \angle QPx < 90^{\circ}$$

أي مجموع زاويتان من المثلث القائم الزاويه $^{\triangle}PRQ$ أقل من 90 درجه و بالتالي مجموع زوايا المثلث $^{\triangle}PRQ$ أقل من 180 درجه.

أحد نتائج هذه القضيه هي عدم وجود مستطيل في الهندسه الهذلوليه (المستطيل مجموع زواياه الداخليه 360 درجه)

القضيه2: *في الهندسه الهذلوليه، من أي نقطه لا على المستقيم* L*، يمكن مرور على الأقل مستقيمان يوازيان المستقيم* L

البرهان:

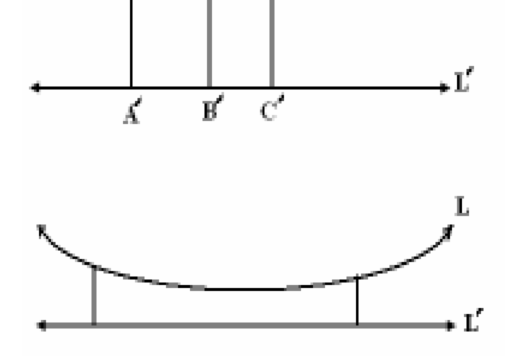


- من النقطه P نرسم عمود PQ على المستقيم L، و كذلك من هذه النقطه نرسم المستقيم m عمود على PQ
- ننتخب النقطه R على المستقيم L و منها نرسم المستقيم t عمود على L
- من النقطه P نرسم العمود PS عمود على t

المستقيم m و العمود PS غير منطبقان لأن، لو كانت S منطبقه على m ففي هذه الحاله $\square PSRQ$ مستطيل، و قد برّهنّا على عدم وجود مستطيل في الهندسه الهذلوليه (مجموع زواياه 360 درجه لأن مجموع زوايا المثلث أقل من 180 درجه)

إذن: المستقيمان PS و m موازيان للمستقيم L (ليست هذه القضيه برهان مطلق لمسلمة التوازي في الهندسه الهذلوليه، هذا البرهان كان بالإستناد على رباعي لامبرت و يعتمد هو الآخر على مسلمة التوازي)

القضيه 3: *في الهندسه الهذلوليه، إذا كان المستقيمان* L *و* L' *موازيان، على الأكثر هناك نقطتان على* L *بنفس الفاصلة من* L'



البرهان:

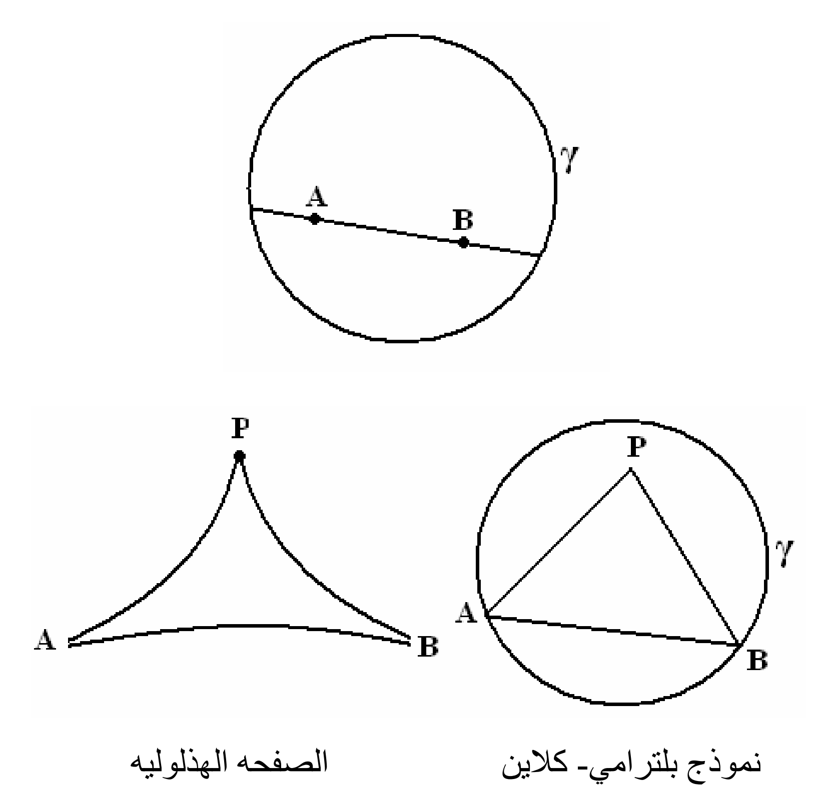
نفرض أن هناك نقطة ثالثه على L هي كذلك بنفس الفاصلة من L'. الرباعي $BB'AA'$□ و $BB'CC'$□ و $ACA'C'$□ هنّ رباعي ساكري (في رباعي ساكري الزوايا المجاوره للقاعده قائمه و الأضلاع المقابله لهذه الزاويتان متساويتان)

$$\left.\begin{matrix} AA' = BB' \\ BB' = CC' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \angle AA'C = CC'A \\ \angle B'BC = C'CB \\ \angle A'AB = B'BA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle B'BC = \angle B'BA$$

هذه الزاويتان مكملتان لذلك جميع رباعيات ساكري في هذا الشكل هي مستطيلات و لا وجود للمستطيل في الهندسه الهذلوليه و هذا تناقض، إذن A وB و C لسنّ بنفس الفاصلة من L'.

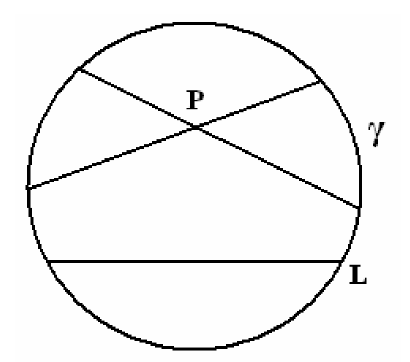
نموذج بلترامي – كلاين (Klein – Beltrami Model)

هذا النموذج عبارة عن دائره γ (دائره مطلقه) مركزها O و نصف قطرها R واقعة على الصفحة الإقليديه. داخل هذه الدائره هو عبارة عن مجموعة النقاط X الواقعه داخل هذه الدائره بحيث: X<OR في هذا النموذج النقاط داخل الدائره هي نقاط الصفحة الهذلوليه، كذلك أوتار هذه الدائره في هذا النموذج هي خطوط الصفحة الهذلولية. في هذا النموذج النقطتان A و B متمايزتان داخل الدائره γ و هناك وتر وحيد يمرّ من كلا هاتين النقطتين. في هذا النموذج النقاط الواقعة على محيط الدائره هي نقاط مثاليه ولا تمثل نقاط الصفحة الهذلوليه.



الصفحه الهذلوليه نموذج بلترامي- كلاين

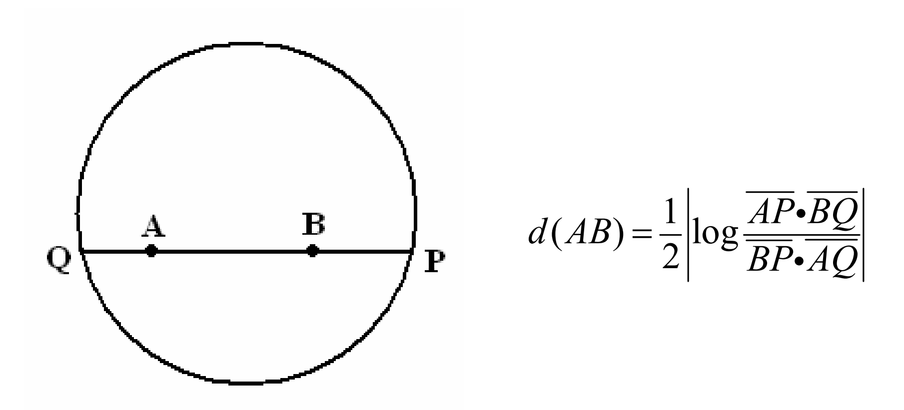
في الشكل المقابل الوتران المارّان من النقطة P يوازيان الوتر L من الدائره γ (يجب التذكير بأن الصيغه المعدله لمسلمة التوازي في الهندسه الهذلوليه هي: من نقطه لا على مستقيم معلوم يمكن مرور **أكثر من** مستقيم يمرّ من هذه النقطة و لا يقطع المستقيم المعلوم)



يستند نظام القياس في هذا النموذج على طول المستقيم و قيمة الزاويه (زاويتان مساويتان إذا كانت قيمة كل زاوية تساوي الأخرى، و مستقيمان مساويان إذا كان طول كل مستقيم يساوي الآخر) لا يمكن الأكتفاء بطول المستقيم في هذا النموذج كما هو الحال في نموذج الصفحة الإقليدية، و حتى لا يأخذ كل مستقيم (خط) طول معين أقلّ أو يساوي نصف قطر الدائره γ، لإن هذا يتنافى مع مفهوم اللا تناهي في هذا النموذج،يجب أعطاء الطول أو الفاصلة تعريفاً جديداً.

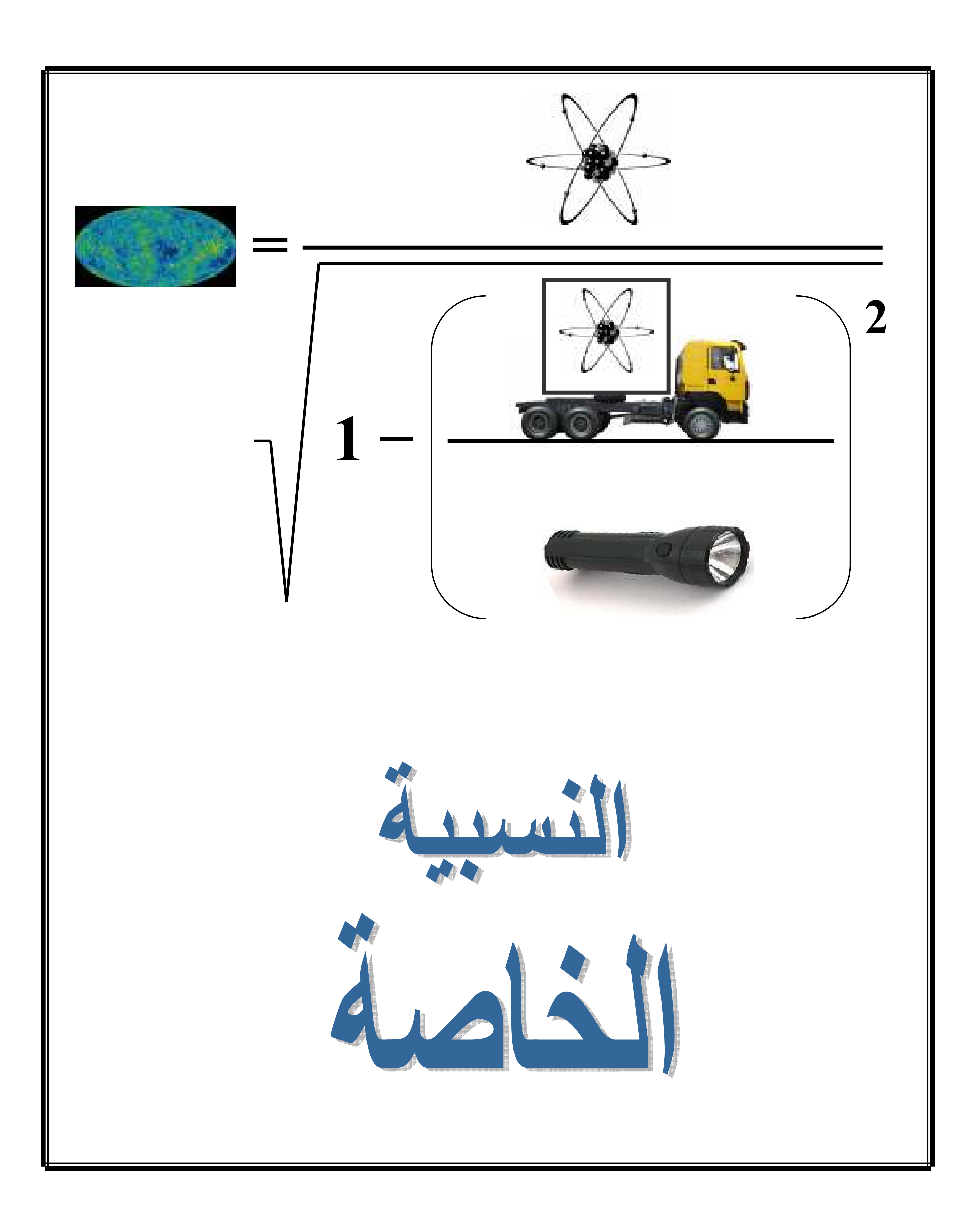
تعريف الفاصله في هذا النموذج بالشكل التالي:

نفرض أن $\overline{AB}$ هي الفاصله الإقليديه بين A و B إذن الفاصله في هذا النموذج هي:



$$d(AB)=\frac{1}{2}\left|\log\frac{\overline{AP}\bullet\overline{BQ}}{\overline{BP}\bullet\overline{AQ}}\right|$$

هناك نموذج آخر بأسم نموذج بوانكاريه Poincaré Model أطلب من القارئ مراجعته و مطالعته. جميع نماذج الصفحه الهذلوليه متشاكلة (Isomorphs) مع بعضها. الغرض من عرض نموذج بلترامي- كلاين و التذكير بنموذج بوانكاريه هو لمعرفة هذه النماذج الهندسية التي يمكن من خلالها تبسيط الفكره الأساسيه التي يصعب تجسيدها و تصورها عملياً، و كما لاحظنا كيف ظهرت بعض الخواص الهندسيه و أخذت تعاريف جديدة تتناسب مع المسلمات والقضايا الهندسيه للفكره الأساسيه، هذه النماذج تسوقنا لإثبات التواؤم بين الهندسه الإقليديه و اللا إقليديه. نموذج بسيط وتعاريف بسيطه متوائمه مع الواقع تسوقنا لمفاهيم و أمور جديدة بعض الأحيان يصعب تصورها و حتى إدراكها كظهور النقطه المثالية في هذا النموذج و كيفية رفع إشكالية الطول و الفاصله، فعلى سبيل المثال الفاصله بين A و B عندما تسعى B نحو P تصبح مالانهايه.


2
1 –
النسبية
الخاصة

النسبية الخاصة

الأصول التي بُنيت عليها نظرية النسبيه

هناك فرضيات و مسلمات و مبآدأ و راء نظرية النسبية، ذات طابع أصولي لهذه النظرية. من هذه الفرضيات ما يخصّ النسبية الخاصة و منها ما يخصّ النسبية العامة. لكن هناك مسلمات و مبآدأ لها تأثير عميق على هذه النظرية و إن كانت هذه المسلمات و المبآدأ غير فيزيائية، كمبدأ ماخ و مسلمة التوازي في الهندسة اللا إقليدية. الفرضيات و المبآدأ التي أستعانت بها هذه النظريه هي:

فرضيات النسبية الخاصة:

- قوانين الفيزياء هي نفسها في كافة المراجع العطالية
- سرعة الضوء في الفراغ مستقلة عن حركة المصدر الضوئي

مبدأ الكوسومولوجيا Cosmological Principle :

- بمقياس واسع جداً ينصّ هذا المبدأ على أن: الكون متجانس و موحّد الخواص.

مبدأ ماخ:

أطلق أنشتاين على مجموعه من أفكار أرنست ماخ مبدأ ماخ و هذه الأفكار هي:

- الفضاء في ذاته لا شئ سوى روابط أنتزاعية بين فواصل المادة.
- الكتلة العطالية لأي ذرة هي نتيجة نوع من التفاعل بين كتلة هذه الذرة و كلّ الكتلة الموجودة في الكون.
- الشئ المهم في الميكانيك هو الحركة النسبية للكتلة جميعها.
- أي جسم في الخلأ (أو الفراغ) لا يملك أي خاصية هندسية.
- المادة هي التي تعين الهندسة، و لا هندسة بلا مادة.

مسلمة التوازي:

في الهندسه الإقليديه: من نقطة لا على مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد يوازي المستقيم المفروض.

في الهندسه الهذلوليه: من نقطة لا على مستقيم يمكن رسم أكثر من مستقيم يوازي المستقيم المفروض.

في الهندسه البيضويه: من نقطة لا على مستقيم لا يمكن رسم مستقيم يوازي المستقيم المفروض.

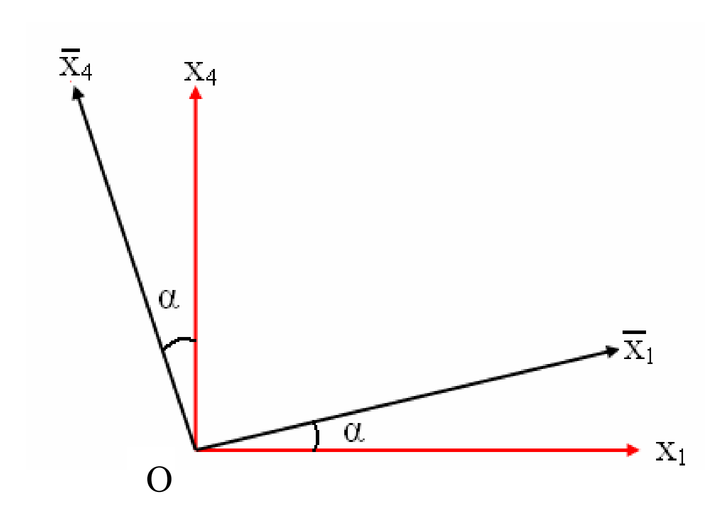
مفهوم المراقب في النسبية

المراقب (الناظر أو الملاحظ أو الراصد) في النسبية هو عبارة عن مجموعة لا متناهية من الساعات موزعة في الفضاء، متزامنات مع بعضهن، و كلٌّ بالنسبة الى الأخرى ساكنة. إذن يجب إزالة التصور الخاطئ من الإلتباس بين أصطلاح "القياس" و "المشاهدة" .

هل هناك طول و زمان مطلق في النسبية؟ نعم، طول قضيب ساكن كمية مطلقة، و هذا الطول ثابت بالنسبة الى كل مراقب في مرجع عطالة. يعني لو عمد كل مراقب عطالة على تحول القضيب الموجود في مرجعه، الى قضيب ساكن، ثم قاموا بقياس طول القضيب، لوجدوا إن هذا الطول مساوي في جميع المراجع. كذلك بالنسبة الى الساعات.

تحويلات لورنتز

تحويلات لورنتز هي عبارة عن روابط تربط بين إحداثيات مرجعين، لإستنتاج هذه الروابط نقوم بدوران محور $\bar{x}_1$ بقيمة α (درجه) بالنسبة الى المحور x_1 و بموازات الصفحه x_4 و x_1 . في هذا الدوران المحوران x_2 و x_3 ثابتان، كذلك مركز الأحداثي ثابت.



$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \cos\alpha + x_4 \sin\alpha \\ \bar{x}_4 = -x_1 \sin\alpha + x_4 \cos\alpha \\ \bar{x}_2 = x_2 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

الآن نستعين بطريقة تنسب الى منكوفسكي في هذه الطريقة نستبدل t زمان كل حادثه في المرجع S بإحداثيه خياليه هي $x_4 = ict$ في هذه الرابطه $i = \sqrt{-1}$ و تصبح إحداثيات الفضاء (x,y,z) بهذا الشكل:

$$x = x_1 \quad و \quad y = x_2 \quad و \quad z = x_3 \quad و \quad ict = x_4$$

لذلك لأي حادثه هناك أربعة إحداثيات. إذن يمكن كتابة معادلات الدوران بهذا الشكل:

$$\begin{cases} \bar{x} = x\cos\alpha + ict\sin\alpha \\ ic\bar{t} = -x\sin\alpha + ict\cos\alpha \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \end{cases}$$

تعبر هذه المعادله عن صفحه ساكنه في المرجع $\bar{S}$ و لجميع مقادير $\bar{t}$ معادلة هذه الصفحه هي:

$$\bar{a}\bar{x} + \bar{b}\bar{y} + \bar{c}\bar{z} + \bar{d} = 0$$

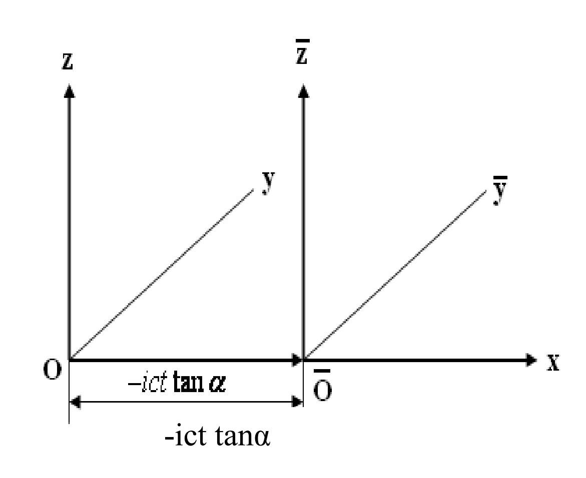
معادلة هذه الصفحة في المرجع S في كل لحظه من t بهذا الشكل:

$$(\bar{a}\cos\alpha)x+\bar{b}y+\bar{c}z+\bar{d}+ict\bar{a}\sin\alpha=0$$

إذا كان $\bar{a}=b=\bar{d}=0$ فهذا سطح صفحة الإحداثي $\bar{O}\ \ \bar{x}\ \bar{y}$ معادلة هذه الصفحه في المرجع S هي الصفحه z =0 هذا هو سطح الصفحه xyO إذا كان $\bar{a}=b=\bar{d}=0$ فسطح الصفحة $\bar{O}\overline{xy}$ و معادلتها في المرجع S هي:

$$x=-ict\tan\alpha$$

هذه هي صفحة موازيه للصفحه xyO و بمقدار $-ict\tan\alpha$ تم انتقالها في أمتداد المحور xO.



نستنتج من هذا ان معادلات لورنتز هي حالة خاصة من إحداثيات المرجع $\bar{S}$ ، ناتجه من أنتقال المرجع S في أمتداد المحور xO و بفاصلة $-ict\tan\alpha$ في كل لحظة t.

إذا كانت سرعة أنتقال المرجع $\bar{S}$ بالنسبه الى المرجع S تساوي u إذن:

$$u=-ic\tan\alpha$$

من هذه المعادلة نستنتج أن الزاويه α زاوية فرضية و ترتبط بسرعة أنتقال الإحداثي إذن:

$$\tan\alpha=\frac{iu}{c}$$

من بعض التحويلات $\left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right)$ المثلثاتيه نصل الى:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\sin\alpha = \frac{iu/c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

نضع هذه الروابط في المعادلات

$$\begin{cases} \bar{x} = x\cos\alpha + ict\sin\alpha \\ ic\bar{t} = -x\sin\alpha + ict\cos\alpha \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \end{cases}$$

النتيجه النهائيه لتحويلات لورنتز هي:

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \\ \bar{t} = \dfrac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

إذا كانت قيمة u بالنسبة الى c صغيرة جداً تصبح هذه المعادلات تقريباً:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - ut \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \\ \bar{t} = t \end{cases}$$

هذه المجموعة من المعادلات تعرف بتحولات غاليلو، و يستعان بها في الفيزياء الكلاسيكيه لربط حوادث و وقائع حادثتان لمرجعين مختلفين. في الفيزياء الكلاسيكيه لن تطرح الرابطه $\bar{t} = t$ و ذلك لأنها بديهية، لأن الزمان في الفضاء الكلاسيكي مطلق.

أهم نتائج تحويلات لورنتز:

النتيجه الأولى: **إنكماش الطول**

- يحدث إنكماش الطول في جهة حركة الجسم، بينما أبعاد الجسم العمودية على جهة الحركه تبقى بدون تغير.

نفرض قضيب صلب على المحور $\bar{x}$ ، من المرجع الساكن $\bar{S}$، إنتهائين هذا القضيب في $\bar{x}=\bar{x}_1$ و $\bar{x}=\bar{x}_2$ طول هذا القضيب في المرجع $\bar{S}$ هو:

$$\bar{L}=\bar{x}_2-\bar{x}_1$$

إستناداً على تحويلات لورنتز، في لحظة t، طرفين هذا القضيب في المرجع S هما في $x=x_1$ و $x=x_2$ ، الرابطة بين إحداثيات طرفين القضيب بين هذين المرجعين هي:

$$\bar{x}_1=\frac{x_1-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{و} \quad \bar{x}_1=\frac{x_1-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

طول القضيب في المرجع S هو $L=x_2-x_1$ إذن:

$$L=\bar{L}\times\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

إنكماش الطول هذا هو ليس نتيجة تغيرات فيزيائيه على الجزيئات كما هو الحال في الإنقباض و الإنبساط الحراري، وإنما هو نتيجة تغير الرابطة بين طول القضيب و وسيلة القياس التي يقاس بها الطول. $\bar{L}$ عبارة عن طول القضيب المُقاس بمسطرة هي ساكنة بالنسبه للقضيب، بينما L طول القضيب المُقاس بمسطرة هي ليست ساكنة بالنسبة لهذا القضيب. كذلك تمّ قياس $\bar{L}$ مستغنين عن ساعة لقياس الزمن، بينما قياس L يستلزم ساعة لتزامن قياس طرفي القضيب. في الفيزياء الكلاسيكيه ِكلا

هذان القياسان ذى نتيجه مساويه، حيث كان التصور بأن الطول هو صفة ذاتية للجسم، لكن أتضح الآن بأن الطول يعرّف بالطريقة التي يتمّ بها قياسه.

النتيجه الثانيه: **إتساع الزمن**

إذا كانت الساعة في مرجع ساكنة بالنسبة للمراقب في ذللك المرجع، الزمن في تلك الساعة هو الأسرع، و إذا كانت الساعة ذات سرعة v بالنسبة للمراقب فأن الزمن سيتباطئ بالنسبة لهذا المراقب بنسبة $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

زمنيّن $\bar{t}_1$ و $\bar{t}_2$ هما لحادثتان في المرجع $\bar{S}$ تمّ قياسهما بساعة ساكنة بالنسبة للمرجع $\bar{S}$, هذين الزمنين لهذه الحادثتين المقاسة بساعة في المرجع S المتحرك بسرعة v هما t_1 و t_2. إذن إستناداً على تحويلات لورنتز:

$$t_2 = \frac{\bar{t}_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad و \quad t_1 = \frac{\bar{t}_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \left(\bar{t}_1 - \bar{t}_2\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta\bar{t} = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

النتيجه الثالثه: **جمع السرعة النسبيه**

إذا كانت سرعة قطار بالنسبه للأرض u و سرعة مسافر داخل القطار (بالنسبه للقطار) $\bar{u}$ من الفيزياء الكلاسيكيه سرعة المسافر بالنسبه للأرض v هي:

$$v = \bar{u} + u$$

من تحويلات لورنتز

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \bar{u}\bar{t} \\ \bar{t} &= \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x - ut = \bar{u}(t - \frac{u}{c^2}x) \Rightarrow x = \frac{u + \bar{u}}{1 + \frac{u\bar{u}}{c^2}} t$$

النتيجة النهائية من تحويلات لورنتز هي:

$$x = \frac{u + \bar{u}}{1 + \frac{u\bar{u}}{c^2}} t$$

إذا كانت سرعة المسافر بالنسبه للأرض v، إذن الفاصله التي يقطعها هذا المسافر بالنسبة للأرض هي x = vt إذن:

$$v = \frac{u + \bar{u}}{1 + \frac{u\bar{u}}{c^2}}$$

إذا أستبدلنا سرعة القطار و سرعة المسافر بنبضات ضوئيه ($u = \bar{u} = c$) فالسرعه النسبيه لهذين المصدرين تبقى نفسها سرعة الضوء، و هذا أحد الدلائل على أن سرعة الضوء سرعة مطلقة لا تخضع للمرجع، أي سرعة الضوء مستقلة عن سرعة مصدر الضوء.

ديناميك النسبية الخاصة

أهم روابطة في ديناميك النسبية الخاصه الرابطه:

$$m = \frac{m_\circ}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

في هذه الرابطه m_o الكتله الكلاسيكيه أو كتلة السكون في مرجع العطاله $\bar{S}$، و m الكتله النسبيه في المرجع S و سرعة الجسم ذو الكتلة m بالنسبه للمرجع S هي u.

الطاقة الحركية (kinetic energy) في الميكانيك النيوتني هي: شغل قوة خارجية لوصول السرعة من الصفر الى u. إذا كانت الطاقة الحركية K و القوة F و تغير المسافة dx إذن:

$$K = \int_0^u F dx = \int_0^u m_\circ \frac{du}{dt} dx = \int_0^u m_\circ du \frac{dx}{dt} = m_\circ \int_0^u u du = \frac{1}{2} m_\circ u^2$$

في الميكانيك النيوتني الكتلة لا تتغير مع السرعة، بينما في ميكانيك النسبية تتغير الكتلة مع تغير السرعة. لذلك الطاقة الحركية في النسبية الخاصة هي:

$$K = \int_0^u F dx = \int_0^u \frac{d}{dt}(mu) dx = \int_0^u d(mu) \frac{dx}{dt} = \int_0^u (mdu + udm) u = \int_0^u (mudu + u^2 dm)$$

في هذ الرابطة m و u متغيرات و الرابطة بينهنّ هي:

$$m = \frac{m_\circ}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

من هذه الرابطة نحصل على:

$$m=\frac{m_\circ}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Rightarrow m^2c^2-m^2u^2=m_\circ^2c^2$$

من تفاضل هذه الرابطة، وتقسيمها على $2m$ نصل الى:

$$2mc^2dm-2m^2udu-2mu^2dm=0\Rightarrow mudu+u^2dm=c^2dm$$

الطرف الأيسر في هذه الرابطة هو نفسه تحت التكامل إذن:

$$K=\int_0^u c^2dm=c^2\int_{m_\circ}^{m}dm=mc^2-m_\circ c^2$$

بما أن $E=mc^2$ الطاقة الكلية للذرة لذلك:

$$E=m_\circ c^2+K$$

$m_\circ c^2$ هي طاقة السكون، أي طاقة سكون ذرة في حالة $u=0$ و $K=0$.

تتساوى الطاقة الحركية النيوتنية و النسبية في حالة $\frac{u}{c}<<1$ و ذلك:

$$K=mc^2-m_\circ c^2\Rightarrow K=\frac{m_\circ}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}c^2-m_\circ c^2\Rightarrow K=m_\circ c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)$$

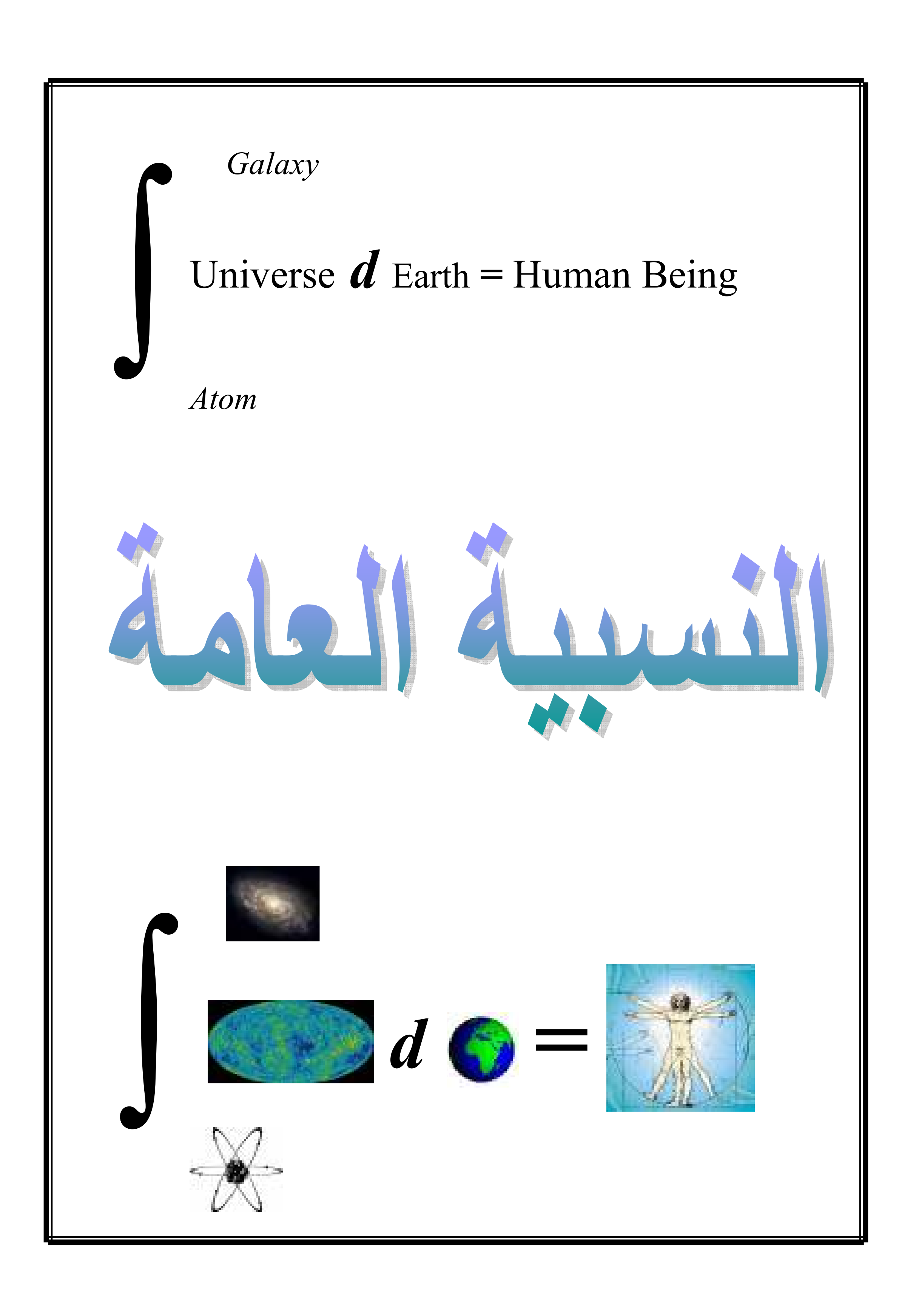
بما أن:

$$(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1)=\left[1+\frac{1}{2}(\frac{u}{c})^2+\frac{3}{8}(\frac{u}{c})^4+\cdots-1\right]\approx\frac{1}{2}(\frac{u}{c})^2$$

لذلك:

$$K=m_\circ c^2\times\frac{1}{2}(\frac{u}{c})^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}m_\circ u^2$$

من هذه المعادلة يمكن إستنتاج هذه النتيجة الرياضية، بأن النظرية النسبية هي حدّ النظرية النيوتنية عندما تسعى السرعة نحو سرعة الضوء.


Galaxy
Universe d Earth = Human Being
Atom
النسبية العامة
d =

السطوح الدورانيه

لبسط و فهم نظرية النسبية العامة لابد من مطالعة السطوح الريمانية و التسلط على العمليات الحسابية التينسورية. مطالعة السطوح الريمانية بكل جوانبها يستطلب وقت و جهد لا يسع لكتاب يتناول النسبية العامة، لكن من خلال شرح و توضيح الأعمال الحسابية على التينسور يمكن لمس معالم الهندسة و السطوح الريمانية، حيث بدأنا بسطوح هندسية منتظمة يمكن تصورها و لمسها وهذا سيساعدنا في تعميم مفهوم الإنحناء و التقوس و نقله من هذه السطوح الهندسية البسيطة الى الفضاء الرباعي الأبعاد. هذه السطوح البسيطة هي السطوح الدورانية و هي أحد أهم مباحث الهندسة التفاضلية و هي سطوح ثلاثية الأبعاد في فضاء إقليدي. من خلال مفاهيم و قضايا الهندسة التفاضلية يمكن تعين و محاسبة إنحناء هذه السطوح، و إشتقاق معادلات جيوديسية المنحنيات الواقعة على هذه السطوح (كذلك محاسبة سائر المقادير الهندسية كالطول، و الحجم، و المساحة). يعتبر الإنحناء و الجيوديسي من أهم مفاهيم و أدوات النسبية العامة، حيث المادة تقوس الفضاء من ثم لا خطوط مستقيمة و إنما خطوط منحنية تخضع (و تخصّ) لهذا الفضاء لتكوّن أقصر فاصلة بين نقطتين من هذا الفضاء. ليست هذه السطوح الدورانية التي سنذكرها هي كل السطوح، و إنما أنتخبنا من بين السطوح الدورانية ما هو أسهل في المعادلات و المحاسبات. لو أستغنينا عن السطوح الدورانية و أستبدلناها بالسطوح الغير منتظمة و اللا متناظره لكانت المعادلات و المحاسبات أطول و أعقد و ربما لخرجنا من أطار البحث. التناظر الموجود في المعادلات يساعد في أختصار و تبسيط المحاسبات على التينسور. هذه السطوح هي ثلاثية الأبعاد لكن في الهندسة التفاضلية يمكن الأستعانة بالإحداثيات المنحنية الذات بعدان.

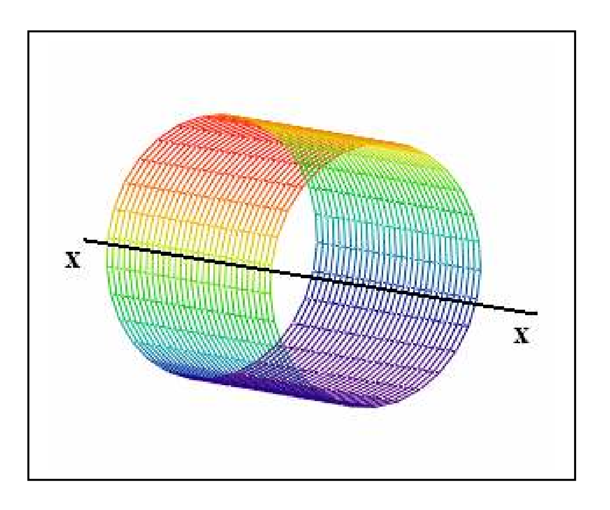
لا يمكن نقل أو تصور السطوح الدورانية (أو كل سطح ثلاثي الأبعاد) في فضاء رباعي الأبعاد، و ليس لهذه الأشكال أي دور في نظرية النسبية، و ما وجودها هنا إلا لشرح و بسط بعض مفاهيم رياضيات النسبية العامة، و ذلك بالأستفادة من معادلاتها.

السطح الدواراني Surface of revolution هو السطح الناتج من دوران منحن مسطح حول محور.

الدالة التي يرسم بهذا هذا النوع من السطوح على إحداثي X,Y,Z هي:

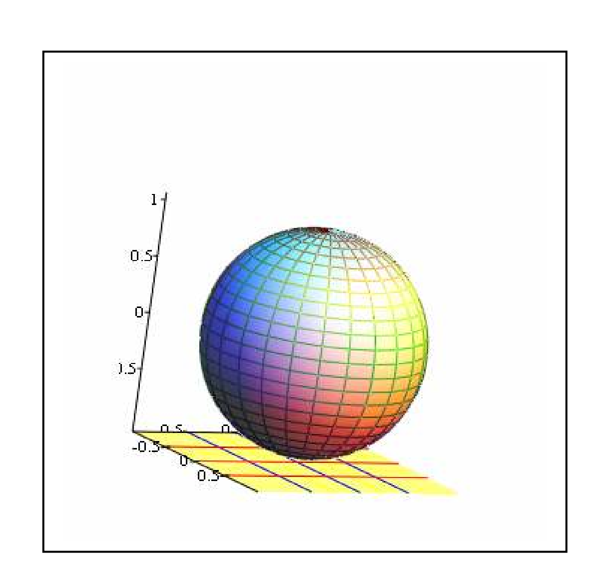
$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\varphi \\ y = f(\theta)\sin\varphi \\ z = h(\theta) \end{cases}$$

في الشكل الأسفل هذه الأسطوانه ناتجه من دوران مستقيم حول محور (x-x)، هذا المحور هو كذلك محور تناظر للسطح الناتج من هذا الدوران.



نماذج من السطوح الدوارانيه:

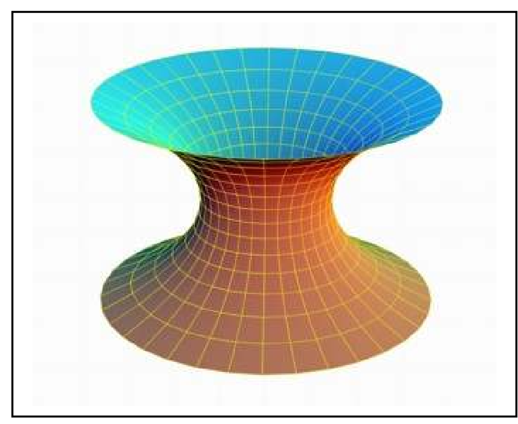
الكره Sphere



$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\phi \\ y = R\cos\theta\sin\phi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$$

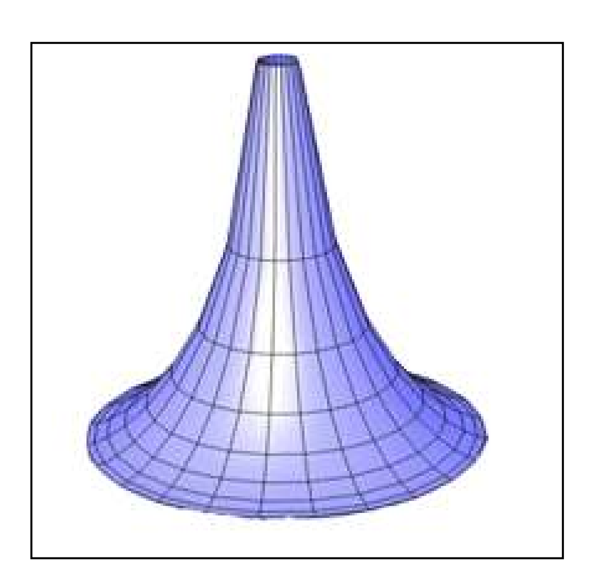
سطح سلسلي الشكل Catenoid

$$\begin{cases} x = R\cosh\dfrac{\theta}{2}\cos\phi \\ y = R\cosh\dfrac{\theta}{2}\sin\phi \\ z = \theta \end{cases}$$



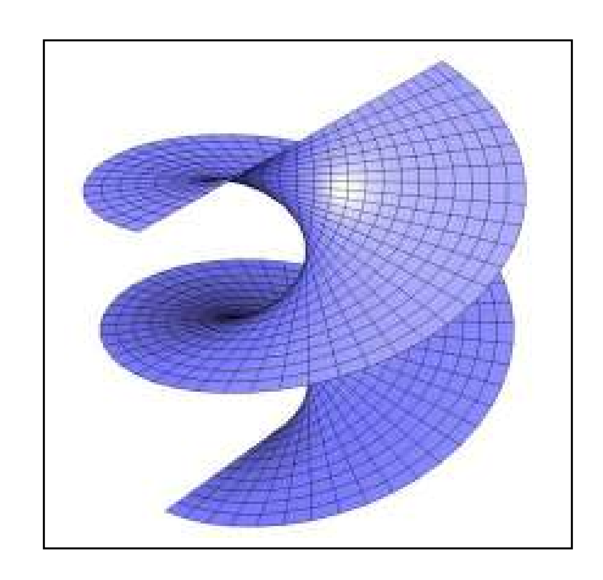
شبه كره Pseudosphere

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R(\cos\theta + \ln\tan\dfrac{\phi}{2}) \end{cases}$$



سطح لولبي Helicoid

$$\begin{cases} x = \theta\cos\phi \\ y = \theta\sin\phi \\ z = R\phi^2 \end{cases}$$



العناصر الأساسيه لنظرية السطوح

في هذا الفصل سنعرّف التينسورتعريفاً رياضياً يتماشا مع مفاهيم الهندسة التفاضلية و رياضيات النسبية العامة، و المفهوم الفيزيائي مستتر في هذا التعريف.

اذا كان i=1,2

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2$$

$$a_i b^{ik} = a_1 b^{1k} + a_2 b^{2k}$$

اذا كانj=1,2

$$g^{ij} g_{jk} = g^{i1} g_{1k} + g^{i2} g_{2k}$$

$$a_{ij} b^{ij} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=2}^{2} a_{ij} b^{ij} = a_{11} b^{11} + a_{21} b^{21} + a_{12} b^{12} + a_{22} b^{22}$$

$$a_{ijk} b^{ijk} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} a_{ijk} b^{ijk} = a_{111} b^{111} + a_{112} b^{112} + a_{121} b^{121} + a_{122} b^{122} + a_{211} b^{211} + a_{211} b^{211} + a_{221} b^{221} + a_{222} b^{222}$$

يمكن تبديل الحروف

$$a_i b^i = a_j b^j = a_k b^k = a_1 b^1 + a_2 b^2$$

نفرض أن x_iو y_i إحداثيات نقطتين Q و P في فضاء N نكتب $z_i = x_i - y_i$ و في هذه الرابطة z_i إحداثيات المتجهة QP، إذا كانت $\overline{x}_i$ و $\overline{y}_i$ إحداثيات هذه النقطتين في إحداثي آخر، إذا كانت إحداثيات هذه المتجهه QP في هذا الإحداثي الجديد $\overline{z}_i$، الرابطه بين هذين الإحداثيين لهذه المتجهة هي:

$$\overline{z}_i = a_{ij} z_j$$

لأي مجموعة ذات N معامل،إذا كانت الإحداثيات في مرجع A_i و في مرجع آخر $\bar{A}_i$ إذن:

$$\bar{A}_i = a_{ij} A_i$$

تعرف A_i بالمتجهة و تختصر بالحرف A.

لأي مجموعة ذات N^2 عنصر،إذا كانت A_i و B_i متجهتان، العبارة $A_i B_i$ نتيجة التحويلات الى إحداثي آخر هي:

$$\bar{A}_i \bar{B}_i = a_{ik} a_{jl} A_k B_l$$

يمكن كتابة هذه الرابطة بهذا الشكل:

$$\bar{C}_{ij} = a_{ik} a_{jl} C_{kl}$$

هذه الرابطة عبارة عن إحداثيات تينسور رتبه (rank) ثانيه

لأي مجموعة ذات N^3 معامل، يشكل D_{ijk} تينسور رتبه ثالثه لتحويلات ضرب ثلاث متجهات $A_i B_j C_k$ ، رابطة التحويل هي:

$$\bar{D}_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} D_{lmn}$$

يجب التذكير بأن المتجهة عبارة عن تينسور رتبه أولى، و لما للمتجهة من أهمية في الفيزياء و الهندسة، يعتبرجبر و حساب التينسور من أهم الوسائل في الهندسة و الفيزياء.

بعض الأعمال الرياضية على التينسور

إذا كان كل من A_{ij} و B_{ij} تينسور رتبه ثانيه، نتائج هذه الروابط كذلك تينسورمن رتبه ثانيه:

$$A_{ij} - B_{ij} \quad و \quad A_{ij} + B_{ij}$$

التينسور هو عبارة عن ناتج ضرب عدة متجهات، إذن ضرب تينسورين من رتبه ثانيه، عبارة عن تينسور رتبه رابعه، و ضرب تينسور من رتبه ثانيه في تينسور من رتبه ثالثه، عبارة عن تينسور رتبه خامسه و هكذا. إذن نتيجة ضرب تينسورين، عبارة عن تينسور درجته هي مجموع درجات هذين التينسورين.

جمع أو ضرب تينسورين كما قلنا عبارة عن تينسور، و يكتب كذلك بهذه الصورة:

$$C^{ik}_{jlm} = A^{i}_{j} B^{k}_{lm} \quad و \quad C^{i}_{jk} = A^{i}_{jk} + B^{i}_{jk}$$

إذا كان التينسور A_{ijk} متناظر بالنسبة الى i و j فيمكن كتابته بهذه الصورة:

$$A_{ijk} = A_{jik}$$

إذا كانت كل معامل التينسور في مرجع مساوية صفر، فمعامل هذا التينسور في أي مرجع آخر هي كذلك تساوي صفر. تينسورين متساويان الرتبة، إذا كانت معاملها المتناظرة متساوية في مرجع، فمعامل هذين التينسورين هي متساوية في أي مرجع آخر.

هذه كذلك بعض الروابط الحسابية على التينسور:

$$\left(a^{i} b_{i}\right)^{2} = a^{i} b_{i} a^{j} b_{j}$$

$$\left(a_{ij}b^{i}\right)c^{j}=a_{ij}b^{i}c^{j}$$

اذا كان الفضاء نوني اي: n=1,2,3,…,n

$$a_ib^i=a_1b^1+a_2b^2+a_3b^3+a_4b^4+a_5b^5+\cdots+a_nb^n$$

إشتقاق الدوال

اذا كانت الداله $f(u^1,u^2)$ دالة إشتقاقية ذات متغيران u^1,u^2 وهذان المتغيران كذلك عبارة عن دوال متغيره من المتغير t ، اذن:

$$f_{u^2u^2}=f_{22}$$

$$f_{u^1u^2}=f_{12}$$

$$f_{u^1u^1}=f_{11}$$

اذا كان $i=1,2,3$

$$df=f_idu^i$$

$$df=f_idu^i=f_1du^1+f_2du^2+f_3du^3$$

هذا يعني إشتقاق بالنسبة للمتغيرات 1و2و3 مثلا اذا كانت هذه المتغيرات x,y,z و الدالة هي f(x,y,z) اذن:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

في حساب التينسور يرمز للإشتقاق بهذه الصيغة $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho}$ وهذه تعني إشتقاق بالنسبة للمتغير ρ كذلك تكتب هكذا: $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho}=\frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}}{\partial\rho}$

دلتا كرونكر

دلتا كرونك Kronecker Delta عباره عن تينسور تعريفه هكذا:

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = i \\ 0 & \text{if} \quad i \neq i \end{cases}$$

بعض روابط دلتا كرونكر

$$b^k \delta_k^i = b^i \quad \text{و} \quad a_i \delta_j^i = a_j \quad \text{و} \quad \delta_{ij} \delta^{jk} = \delta_i^k \quad \text{و} \quad \delta_i^j \delta_j^k = \delta_i^k$$

علائم كريستوفل

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

$$2\Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{11}^3 \\ \Gamma_{11}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{12}^3 \\ \Gamma_{12}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{13}^1 \\ \Gamma_{13}^2 \\ \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{13}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{14}^1 \\ \Gamma_{14}^2 \\ \Gamma_{14}^3 \\ \Gamma_{14}^4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{21}^1 \\ \Gamma_{21}^2 \\ \Gamma_{21}^3 \\ \Gamma_{21}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \\ \Gamma_{22}^3 \\ \Gamma_{22}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{23}^1 \\ \Gamma_{23}^2 \\ \Gamma_{23}^3 \\ \Gamma_{23}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{24}^1 \\ \Gamma_{24}^2 \\ \Gamma_{24}^3 \\ \Gamma_{24}^4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{31}^1 \\ \Gamma_{31}^2 \\ \Gamma_{31}^3 \\ \Gamma_{31}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{32}^1 \\ \Gamma_{32}^2 \\ \Gamma_{32}^3 \\ \Gamma_{32}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{33}^1 \\ \Gamma_{33}^2 \\ \Gamma_{33}^3 \\ \Gamma_{33}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{34}^1 \\ \Gamma_{34}^2 \\ \Gamma_{34}^3 \\ \Gamma_{34}^4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{41}^1 \\ \Gamma_{41}^2 \\ \Gamma_{41}^3 \\ \Gamma_{41}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{42}^1 \\ \Gamma_{42}^2 \\ \Gamma_{42}^3 \\ \Gamma_{42}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{43}^1 \\ \Gamma_{43}^2 \\ \Gamma_{43}^3 \\ \Gamma_{43}^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Gamma_{44}^1 \\ \Gamma_{44}^2 \\ \Gamma_{44}^3 \\ \Gamma_{44}^4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

الشكل الأساسي الأول للسطح

لا أدخل في عمومية الموضوع بل أبدأ من السطوح الدوارانية

نفرض ان السطح دوراني و معادلته هي:

$$\begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\sin v \\ z = h(u) \end{cases}$$

هندسياً الشكل الأساسي الأول للسطح هو $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ و كذلك هي الصيغه العموميه للسطوح.

مع العلم أن في السطوح الدورانيه $g_{12} = g_{21} = 0$

يجب التميز بين u في هذه الرابطه و u في معادلة السطح

$$ds^2 = g_{11}du^1du^1 + g_{12}du^1du^2 + g_{21}du^2du^1 + g_{22}du^2du^2$$

في هذه الرابطه يمكن كتابة

$$du^1 = du$$

$$du^2 = dv$$

لأن المتغيران هنا فقط أثنان، ليس هنا 1 و 2 بمعنى أس.

للسطح الدواراني:

$$g_{11} = \left(f'\right)^2 + \left(h'\right)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g_{22} = \left(f\right)^2$$

مميّزة الشكل الأساسي الأول:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \left(f\right)^2\left(\left(f'\right)^2 + \left(h'\right)^2\right)$$

هذه بعض الأمثله:

الكره

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\phi \\ y = R\cos\theta\sin\phi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$$

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2\cos^2\theta d\phi^2$$

شبه الكره

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R(\cos\theta + \ln\tan\frac{\varphi}{2}) \end{cases}$$

$$ds^2 = R^2\cot^2\theta d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\phi^2$$

كذلك يمكن محاسبة هذه الرابطة لباقي السطوح الدوارانية.

الشكل الأساسي الثاني للسطح

هندسياً الشكل الأساسي الثاني للسطح هو بهذه الصورة $II = b_{ij} du^i du^j$ و هو عبارة عن إنحراف السطح عن الصفحة المماسّة على السطح.

المعادلة العامة للسطح الدوراني كما ذكرنها هي:

$$\begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\sin v \\ z = h(u) \end{cases}$$

معامل الشكل الأساسي الثاني للسطح:

$$b_{11} = \frac{f' h'' - h' f''}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}$$

$$b_{12} = b_{21} = 0$$

$$b_{22} = \frac{f\ h'}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}$$

مميّزة الشكل الأساسي الثاني:

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

بعض الأمثله للشكل الأساسي الثاني للسطح:

الكره

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\cos\theta\sin\varphi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$$

$$II = Rd\theta^2 + R\cos^2\theta d\phi^2$$

شبه الكره

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R(\cos\theta + \ln\tan\frac{\varphi}{2}) \end{cases}$$

$$II = -R\cot\theta d\phi^2 + R\sin\theta\cos\theta d\phi^2$$

إنحناء غاوس

إنحناء غاوس في الإحداثيات المنحنيه، يساوي النسبه بين مميّزة الشكل الأساسي الثاني، الى مميّزة الشكل الأساسي الأول أي:

$$K=\frac{b}{g}=\frac{b_{11}b_{22}-(b_{12})^2}{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2} \qquad K=\frac{b}{g}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}$$

$$K=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\Gamma_{11}^{s}}{\partial u^2}-\frac{\partial\Gamma_{12}^{s}}{\partial u^1}+\Gamma_{11}^{r}\Gamma_{r2}^{s}-\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{r1}^{s}\right]g_{s2}$$

راجع فصل الأمثله.

إنحناء غاوس الكره:

$$K=\frac{R^2\cos^2\theta}{R^4\cos^2\theta}=\frac{1}{R^2}$$

إنحناء غاوس شبه الكره:

$$K=\frac{-R^2\cos^2\theta}{R^4\cos^2\theta}=-\frac{1}{R^2}$$

الصفحه في الإحداثيات الكارتيزية:

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

$$II=0$$

$$K=\frac{0}{1}=0$$

إنحناء غاوس للسطوح الدورانية هو:

$$\left.\begin{aligned}x&=f(u)\cos v\\ y&=f(u)\sin v\\ z&=h(u)\end{aligned}\right\}\Rightarrow K=\frac{-h'^2 f''+f'h'h''}{f(f'^2+h'^2)^2}$$

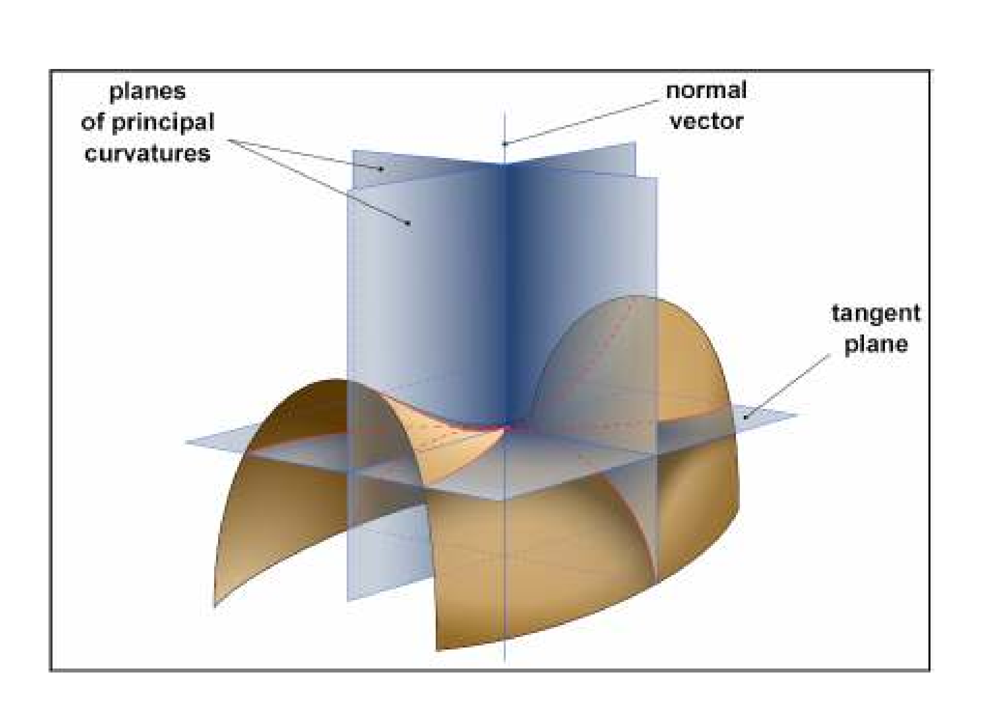
نتيجه: الإنحناء الغاوسي علي السطوح البيضويه موجب (علامته زائد)، و على السطوح الهذلوليه سالب (علامته ناقص) و على سطح مستوي صفر.

طول المتقاصر أو الجيوديسي على سطوح ذات إنحناء موجب متناهي، و على سطوح ذات إنحناء سالب لامتناهي.

الإنحنائان الرئيسيان (principal curvature) k_1 و k_2 هما القيمة العظمى و الصغرى للإنحناء الناظمي (normal curvature) عند نقطة في سطح. الإنحناء الغاوسي في هذه النقطة يساوي حاصل ضرب هذان الإنحنائان أي:

$$K = k_1 k_2$$

عند أي نقطة على سطح، إنحناء المنحنيان الحاصلان من تقاطع صفحتان متعامدتان مع هذا السطح في تلك النقطة هما k_1 و k_2.



في هذا الشكل السَرجي:

$k_1 < 0$ هذلولي

$k_2 > 0$ مكافئ

إذن إنحناء هذا السطح

$K < 0$

مصدر هذه الصورة: http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_curvature

علائم كريستوفل

$$2\Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$$

في حالة $g_{12} = g_{21} = 0$

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}) = +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma_{121} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}) = +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

$$\Gamma_{221} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma_{112} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

$$\Gamma_{122} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}) = +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}) = +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}$$

بما أن $g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ لذلك:

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{21} \\ g^{12} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{1}{g_{11}}$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{1}{g_{22}}$$

$$g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g} \Rightarrow g_{12} = g_{21} = 0 \wedge g \neq 0 \Rightarrow g^{12} = g^{21} = 0$$

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2} g^{is} (\frac{g_{sj}}{\partial u^k} + \frac{g_{sk}}{\partial u^j} - \frac{g_{jk}}{\partial u^s})$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}$$

مساحة السطح

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2$$

مثال: مساحة الكره

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2$$

$$g = R^4 \cos^2 \theta$$

$$A = \iint R^2 \cos\theta d\theta d\varphi = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2$$

طول قوس منحني

طول قوس منحني بين نقطتين t=b , t=a

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j}$$

من هذه الرابطه يتضح إنه $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ لذلك:

$$ds^2 = g_{11}\left(du^1\right)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}\left(du^2\right)^2$$

الإنحناء الجيوديسي

تقوس سطح فضائي في نقطة واقعه على السطح مثل النقطه p ، عباره عن متجهه جهتها في إتجاه القائم على هذا السطح. طول هذه المتجهه هو إنحناءالمنحن في تلك النقطة.

تجزئة متجهة الإنحناء لمنحن على سطح الى متجهتين، عموديه و أفقيه، متجهة الإنحناء الأفقيه هي متجهة الإنحناء الجيوديسي k_g

$$k_g = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) r_n$$

إنحناء جيوديسي منحن على سطح يساوي:

$$k_g = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \\ \frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma^1_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} & \frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma^2_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \end{vmatrix}$$

الجيوديسي

خط أو منحن متقاصر أو بعبارة أخرى مسار جيودسي، هو عبارة عن مسير أقصر فاصلة بين نقطتين على سطح أو في الفضاء. و بتعبير آخر، هو منحن على سطح (أو في الفضاء) بحيث، إنحناء الجيوديسي لهذا المنحني على هذا السطح (أو في الفضاء) يساوي صفر. أي:

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0$$

في هذه المعادله s متغير المنحن يصدق في هذه الرابطه:

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1$$

الطرف الأيمن في هذا التساوي هو مقدار ثابت و قد أخترناه هنا واحد.

- المنحنيات المتقاصره أو الجيوديسي في الصفحه هي خطوط مستقيمه و ذلك لإن:
  كل علائم كريستوفل في الصفحه مساويه صفر ، لذا:

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} = 0$$

جواب هذه المعادله الإشتقاقية عبارة عن خطوط مستقيمه.

- المنحنيات المتقاصره أو الجيوديسي على الكره هي دوائر.

رياضيات النسبية العامة

إذا كانت (x, y, z) و $(x+dx, y+dy, z+dz)$ إحداثيات نقطتان مجاورتان في إحداثي كارتيزية، و (u, v, w) و $(u+du, v+dv, w+dw)$ إحداثيات هذه النقطتين في إحداثي منحن، التحويلات بين هذين الإحداثيين هي:

$$x = x(u, v, w) \quad \text{و} \quad y = y(u, v, w) \quad \text{و} \quad z = z(u, v, w)$$

إذن:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw$$

إذا كانت ds^2 الفاصلة بين هاتين النقطتين إذن:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

إذا وضعنا dx و dy و dz في هذه الرابطة نحصل على:

$$ds^2 = Adu^2 + Bdv^2 + Cdw^2 + 2Fdvdw + 2Gdwdu + 2Hdudv$$

المعامل A و B و C و غيرها هي دوال متغيراتها (u, v, w). نكتب هذه الرابطة بهذه الصورة:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

كذلك في هذه الرابطة g_{ij} دوال متغيراتها x^i و x^j. يعرف الطرف الأيمن من هذه الرابطة، بمترية فضاء ريمان.

نفرض أن x^i إحداثيات نقطة P في مرجع من فضاء نوني، و $\bar{x}^i$ إحداثيات هذه النقطة في مرجع آخر من هذا الفضاء، ترتبط إحداثيات هذين المرجعين بهذه الرابطة:

$$\bar{x}^i = x^i(x^1, x^2, ..., x^n)$$

نفرض أن بمجاورة هذه النقطة هناك نقطة أخرى هي P' إحداثيات هذه النقطة في هذين المرجعين بالترتيب هي $x^i + dx^i$ و $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$ بحيث:

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j$$

تعريف: أي متجهة أنتقالية تصدق عليها هذه الرابطة هي متجهة مخالفة للتغير(contra variant).أي:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j$$

كل متجهة مخالفة للتغير يمكن تعريفها في نقطة واحدة من الفضاء، فإذا عرّفنا هذه المتجهة في أي نقطة من الفضاء، بحيث A^i هي توابع من x^i في هذه الحالة يمكن القول بوجود حقل متجهي مخالف للتغير في هذه الناحية من الفضاء.

الكمية التي لا تتغير قيمتها مع تغير المراجع هي لا متغير (invariant) و معادلتها في فضاء نوني هي:

$$A = \bar{A}$$

لا ترتبط A بأي متغير لذلك يمكن تعريفها في أي نقطة من الفضاء، إذن هي حقل لامتغير.

هناك متجهة أخرى تعرف بمتجهة، موافقة التغير (covariant). إذا كانت B_i متجهة موافقة للتغير إذن:

$$\bar{B}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} B_j$$

في كتابة روابط المتجهات الموافقة و المخالفة للتغير يجب الدقة في وضع الدليل (index) في أعلى أو أسفل الحرف. نذكر بأن dx^i عبارة عن متجهة مخالفة للتغير، بينما x^i بمفردها هي ليست إحداثيات متجهة. لذلك نكتب الإحداثيات بصورة x^i، عوضاً عن x_i.

الآن نعمم نظرية المتجهات لتشمل التينسور، إذا كانت A^i و B^i متجهتان مخالفتان للتغير، في حالة N^2 معامل، الرابطة $A^i B^i$ عبارة عن تينسور مخالف للتغير و معادلته بهذا الشكل:

$$\bar{A}^i \bar{B}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^k B^l$$

إذا كانت A^i متجهة مخالفة للتغير و B_j متجهة موافقة للتغير، في حالة N^2 معامل، الرابطة $A^i B_j$ هي تينسور مختلط و معادلته بهذا الشكل:

$$\bar{A}^i \bar{B}_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^k B_l$$

التينسور A^i_{jk} ، هو تينسور مختلط رتبه ثالثه ذو خاصية موافقة و مخالفة التغير، شريطة أن يصدق في هذه الرابطة:

$$A^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} A^r_{st}$$

مثال: إذا كان A_i متجهة، إحداثيتها الموافقة للتغير هي:

$$A^i = g^{ij} A_j = A_i$$

من هذا المثال نستنتج: عدم الأختلاف بين المتجهة الموافقة و المخالفة للتغير.

إذا كانت الرابطة $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ بين أي نقطتين مجاورتين (على سطح) أو في الفضاء، فهذه الرابطة هي مترية هذا الفضاء.

بما أن ds^2 لا متغير، كذلك $dx^i dx^j$ عبارة عن تينسور متناظر ، لذلك g_{ij} عبارة عن تينسور موافق للتغير و كذلك متناظر. التينسور المخالف للتغير، لهذا التينسور هو g^{ij} ، وجود هذا التينسور مشروط بأن:

$$g = \left| g_{ij} \right| \neq 0$$

نفرض A^j متجهة مخالفة للتغير، في نقطة من الفضاء، إذن: $g_{ij} A^j$ هي متجهة موافقة للتغير نرمز لها A_i أي:

$$A_i = g_{ij} A^j$$

A^i و A_i هنّ المعامل الموافقة و المخالفة التغير لمتجهة، بالنسبة الى المرجع المستعمل.

مثال: كيفية نقل الدليل من فوق و من الأسفل:

$$g^{ij} A_j = g^{ij} g_{jk} A^k = \delta^i_k A^k = A^i$$

$$A^i_{jk} = g_{jr} A^{ir}_k$$

$$g^{ri} g^{sj} g_{ij} = g^{ri} \delta^s_i = g^{rs}$$

$$A^2 = g_{ij} A^i A^j$$

الإنتقال الموازي

إشتقاق $\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k$ بالنسبة الى $\bar{x}^j$ هو:

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial A_k}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} A_k$$

وجود الرابطة الثانية دليل على أن $\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j}$ هي ليست تينسور. بما أن dx^i هي متجهة، فلو أن $\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j}$ (كذلك تكتب هذه العبارة بهذا الشكل $A_{i,j}$) كانت تينسور لأصبحت الرابطة $dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j$ عبارة عن متجهة، أو معادلة تينسورية. لحل هذه الأشكالية نستعين بمفهوم الأنتقال الموازي.

ننقل المتجهة A_i من النقطة P الى نقطة تجاورها هي P' دون تغير طول و جهة المتجهة. إحداثيات أي متجهة بعد الأنتقال هي ليست كإحداثياتها قبل الإنتقال، إحداثيات هذه المتجهة بعد الإنتقال هي $A_i + \delta A_i$ و إحداثيات الحقل المتجهي في النقطة P' هي $A_i + dA_i$. بما أن هذه المتجهتين لنقطة واحدة في الفضاء، إذا نقصنا هذه المتجهتين من بعضهما فالنتيجة، المتجهة $dA_i - \delta A_i$ إذن:

$$dA_i - \delta A_i = A_{i;j} dx^j$$

إستبدلنا $A_{i,j}$ بالرابطة $A_{i;j}$ بما أن dx^j متجهة، و كذلك الطرف الأيسر من هذه الرابطة متجهة نستنتج بأن $A_{i;j}$ هي تينسور(يجب التميز بين , و ;). بهذه الطريقة تمكنا من تعريف الإشتقاق على التينسور.

إذا كانت A_i متجهة في النقطة P تحت أنتقال موازي الى النقطة P' و B_i إحداثيات حقل متجهي بالنسبة للمحور Y من الإحداثي في هذه الحالة:

$$B_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} A_j \quad \text{و} \quad A_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} B_j$$

الإنتقال الموازي للمتجهة A_i لا يترك أي تغير على B_i لذلك $\delta B = 0$ (تغيرات B تساوي صفر)
من هذا:

$$\delta A_i = \delta(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} B_j) \Rightarrow \delta A_i = \delta(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}) B_j$$

$$\delta A_i = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} dx^k B_j$$

بما أن $B_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} A_j$ لذلك:

$$\delta A_i = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} A_l dx^k$$

للأختصار تكتب هذه الرابطة بهذا الشكل:

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial y^i}$$

تعرف هذه الرابطة بعلائم كريستوفل.

إذن:

$$\delta A_i = \Gamma^l_{ik} A_l dx^k$$

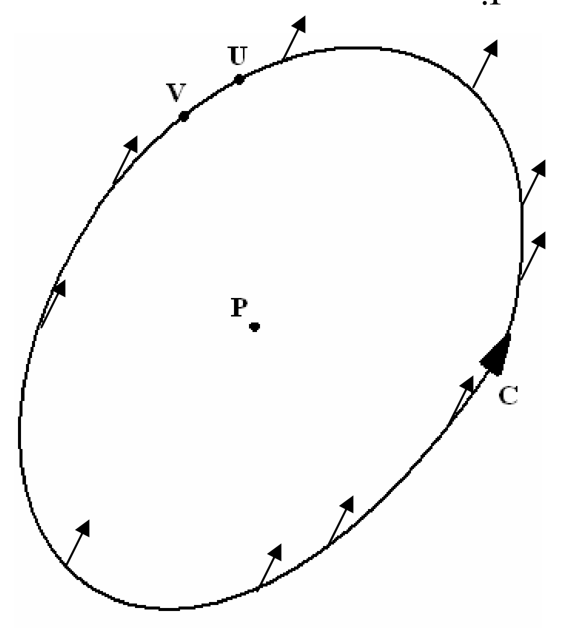
هذه المعادلة، هي معادلة إنتقال موازي متجهة موافقة التغير.

كذلك معادلة إنتقال موازي، متجهة مخالفة التغير هي:

$$\delta B^k = -\Gamma^k_{ij} B^i dx^j$$

تينسور إنحناء ريمان – كريستوفل

نفرض أن المتجهة A^i واقعة على المنحني C في فضاء إقليدي أو غير إقليدي، و تنتقل بشكل موازي دورة كاملة حول هذا المنحني، تتغير إحداثيات هذه المتجهة حين حركتها حول المنحن، إذا كانت هذه التغيرات هي ΔA^i فإذن هي لا تساوي صفر. نحن بصدد محاسبة قيمة هذه التغيرات لدورة كاملة للمتجهة A^i على محيط منحن صغير C مركزه النقطة P.



نفرض أن إحداثيات النقطة U هي: $x^i + \xi^i$

و نقطة V مجاورة الى U إحداثياتها هي: $x^i + \xi^i + d\xi^i$

عند إنتقال المتجهة A^i من النقطة U الى النقطة V فان إحداثيات هذه المتجهة تتغير طبقاً لهذه الرابطة:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{jk} A^j d\xi^k \qquad \mathbf{I}$$

يجب تعين كل من A^j و Γ^i_{jk} في النقطة U. مع العلم إن قيمة ξ^i قليله جداً.

أول تقريب Γ^i_{jk} من خلال متتالية تيلور في حساب التكامل و الإشتقاق هو:

$$\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^i} \xi^i \qquad \mathbf{II}$$

الإنتقال الموازي للمتجهة A^j من النقطة P الى النقطة U هو عبارة عن:

$$A^j - \Gamma^j_{rl} A^r \xi^l \qquad \mathbf{III}$$

في هذه الرابطة يجب تعيين كل من A^j و A^r و Γ^j_{rl} في النقطة P.

نضع كل من II و III في الرابطة I نحصل على:

$$\delta A^i = -\left[\Gamma^i_{jk} A^j + (A^j \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \Gamma^i_{jk}\Gamma^j_{rl} A^r)\xi^l\right] d\xi^k$$

تكامل هذه الرابطة حول المنحن C.

$$\Delta A^i = -\Gamma^i_{jk} A^j \oint_C d\xi^k + (\Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}) A^j \oint_C \xi^l d\xi^k$$

قمنا بتبديل الدليل j و r في العبارة الأولى داخل القوسين. التكامل حول المنحني C يستطلب:

$$\oint_C d\xi^k = 0$$

$$\oint_C \xi^l d\xi^k = -\oint_C \xi^k d\xi^l$$

نستعين بهذا التعريف:

$$\alpha^{kl} = \frac{1}{2}\oint_C (\xi^l d\xi^k - \xi^l d\xi^k)$$

نحصل على:

$$\Delta A^i = (\Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}) A^j \alpha^{kl}$$

العبارة داخل القوسين ليست تينسور، لحل هذه الأشكالية هناك قضية نغض النظر عن إثباتها و نكتفي بنتيجتها بخصوص هذه المسئلة و هي إمكانية إستبدال الدليل k و l إذن:

$$\Delta A^i = (\Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}) A^j \alpha^{lk}$$

من جمع الرابطتين الأخيرتين و إحتساب هذه الرابطة $\alpha^{kl} = -\alpha^{lk}$ نحصل على:

$$\Delta A^i = -\frac{1}{2}(\Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} + \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l})A^j\alpha^{lk}$$

الآن أصبحت العبارة داخل القوسين تخالفية التناظر(skew-symmetric) للدلائل k و l إذن الرابطة:

$$(\Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} + \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l})A^j$$

هي تينسور،ثم ننتخب A^j بحيث:

$$B^i_{jkl} = \Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} + \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}$$

هذه الرابطة تينسور، و تعرف بتينسور إنحناء ريمان – كريستوفل.

من تقليص التينسور B^i_{jkl} ، بالنسبة الى i و l نحصل على تينسور ريتشي R_{jk} أي:

$$R_{jk} = B^i_{jki}$$

بعض أهم معادلات النسبية العامة:

أهم معادلات النسبية العامة لمترية بهذا الشكل:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \qquad \text{و} \qquad g^{ij} = \frac{1}{g_{ij}}$$

هي:

مسار الجيوديسي

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

مع الشرط: $g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1$

تينسور ريمان

$$R^{\mu}_{ijk} = \Gamma^{\mu}_{ik,j} - \Gamma^{\mu}_{ij,k} + \Gamma^{\mu}_{sj}\Gamma^{s}_{ik} - \Gamma^{\mu}_{sk}\Gamma^{s}_{ij}$$

$$R^{\mu}_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^{\mu}_{sj}\Gamma^{s}_{ik} - \Gamma^{\mu}_{sk}\Gamma^{s}_{ij}$$

تينسور ريتشي

$$R_{ij} = R^k_{ijk}$$

$$R = g^{ij}R_{ij}$$

تينسور أنشتاين

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$$

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R$$

هذه التينسورات هي بمثابة الهيكل العظمي لنظرية النسبية العامة، و من خلالها يمكن حساب:

- إنحراف الضوء عند مروره قرب كتلة ضخمة.
- تقدم نقطة حضيض الكواكب.
- إنزياح الطيف نحو الأحمر.
- بناء نموذج رياضي للكون (على سبيل المثال نموذج فريدمان).

مراحل طرح وحلّ و البحث في مسائل النسبية العامة

- تعين مترية الفضاء، و كتابتها في نظام إحداثي مناسب كالإحداثي الكروي أو القطبي أو الكارتيزي. الأفضل أن تكون هذه المترية متناظره و ذلك لسهولة المحاسبات، و كذلك ترضي الخصائص الهندسية و الفيزيائية للفضاءالذي نريد البحث فيه، يمكن فرض هذه الخصائص قبل بدأ الحلّ أو فرض معامل ذات متغيرات نتوصل لقيّمها و الى روابطها بعد حلّ المعادلات الإشتقاقية أو الجبرية الحاصله.

- تعين متغيرات المترية، مثلاً إذا كانت الإحداثيات كروية يجب تعين r و θ و ϕ و إذا كانت رباعية الأبعاد تعين بعد الزمان t و إذا كانت الإحداثيات كارتيزية يجب تعين المتغيرات x و y و z و t و هكذ.ا مثلاً الإحداثيات الكرويه رباعية الأبعاد بهذه الصورة:

$$x^1 = r$$
$$x^2 = \theta$$
$$x^3 = \phi$$
$$x^4 = t$$

- تعين المعامل g_{ij} للمترية $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ ، الأفضل أن تكون المترية قطرية و ذلك لسهولة المحاسبات.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix}$$

- تعين علائم كريستوفل Γ^k_{ij} المخالفة للصفر.

- تعين معادلات الجيوديسي لهذه المترية. تمثل هذه المعادلات مسير المتقاصرات في هذا الفضاء سواء منحنيات متناهية أو غير متناهية. في بعض النماذج الكونية تمثل هذه الجيوديسي مسير حركة الكواكب و الأجرام السماوية.

- محاسبة تينسور ريمان R^{s}_{ijk} ، في بعض المتريات الأفضل محاسبة هذا الشكل من تينسور ريمان: R_{1212} و ذلك لسهولة المحاسبات من خلال هذا التينسور.

- محاسبة تينسور ريتشي R_{ij} ، من تينسور ريمان يمكن محاسبة تينسور ريتشي. لهذا التينسور أهمية بالغة في نظرية النسبية العامة و ذلك لأنه يمثل معادلات حقل أنشتاين. من تساوي جميع معامل هذا التينسور مع الصفر نحصل على مجموعة من المعادلات الإشتقاقية. يُعَين و يُعَرّف الفضاء من خلال هذه المعادلات. كذلك من هذه المعادلات يمكن تعين معامل المترية في حال كانت بصورة متغيرات مجهولة، كما هو الحال مع مترية شوارتزشيلد.

- محاسبة سلّميّة ريتشي R ، تمثل الرابطة أو القيمة التي نحصل عليها من هذه السلّميّة تقوس أو إنحناء الفضاء، سواء كان سالب، موجب أو صفر. كذلك من خلال هذه السلّميّة يمكن محاسبة تينسور أنشتاين.

- محاسبة تينسور أنشتاين G_{ij} ، تكمن أهمية هذا التينسور في الفضاء الذي تتواجد فيه المادة، كالفضاء الناتج من مترية روبرتسون – واكر.

نموذج رياضي لروابط النسبية العامة يمكن تطبيقه على الحاسوب

العمليات الحسابية على هذه التينسورات مملة و متعبة، و لكي نتمكن من حسابها نحن بحاجة الى نموذج رياضي يختصر المحاسبات، يقلل التكرار، و يبسط الرابطة و يختصرها.

النموذج هو بهذه الصورة:

نكتب معادلة مسار الجيوديسي في فضاء النسبية بهذه الصيغة:

$$ds^2 = A(x,y,z,t)dx^2 + B(x,y,z,t)dy^2 + C(x,y,z,t)dz^2 + D(x,y,z,t)dt^2$$

$$\alpha(x,y,z,t) = \frac{1}{2A(x,y,z,t)}$$

$$\beta(x,y,z,t) = \frac{1}{2B(x,y,z,t)}$$

$$\gamma(x,y,z,t) = \frac{1}{2C(x,y,z,t)}$$

$$\delta(x,y,z,t) = \frac{1}{2D(x,y,z,t)}$$

للاختصار نكتب هذه الروابط بهذا الشكل:

$$ds^2 = Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + Ddt^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2A}$$

$$\beta = \frac{1}{2B}$$

$$\gamma = \frac{1}{2C}$$

$$\delta = \frac{1}{2D}$$

تستنتج علائم كريستوفل من هذه الرابطه:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\tau}(g_{\tau\nu,\sigma} + g_{\tau\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\tau})$$

للتذكير نكرربأن:

$$A_\mu = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}$$
$$B_{12} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial x^2}$$

في هذه الروابط يمكن ان يكون $\partial x^1 = \partial x$ و كذلك $\partial x^2 = \partial y$ (الأعداد هنا ليست بمعنى الأس).

علائم كريستوفل

في الصفحة السابقه عرضنا كل الروابط التي يمكن من خلالها حساب قيّم علائم كريستوفل لكل الحالات. الأستعانة بالحاسوب و من خلال برنامج بسيط مثل MATLAB أو MATCAD أو MAPLE أو من خلال برمجة بأحد البرامج، يمكن حساب هذه المعامل. كذلك كتبنا صورة مبسطة لبعض معامل هذه التينسورات يمكن محاسبتها أو تعين قيّمها أو علامةِ قيّمُها من خلال هذه البرامج.

يجب لا ننسى إن في معادلة الجيوديسي $g_{12} = g_{21} = 0$.

$\Gamma^1_{23} = 0$ و $\Gamma^1_{1\mu} = -\alpha A_\mu$ و $\Gamma^4_{44} = \delta D_4$ و $\Gamma^2_{23} = -\beta C_2$

$$\Gamma := \begin{pmatrix}
\alpha\cdot\frac{d}{dx}A & -\beta\cdot\frac{d}{dy}A & -\gamma\cdot\frac{d}{dz}A & -\delta\cdot\frac{d}{dt}A \\
\alpha\cdot\frac{d}{dy}A & \beta\cdot\frac{d}{dx}B & 0 & 0 \\
\alpha\cdot\frac{d}{dz}A & 0 & \gamma\cdot\frac{d}{dx}C & 0 \\
\alpha\cdot\frac{d}{dt}A & 0 & 0 & \delta\cdot\frac{d}{dx}D \\
\alpha\cdot\frac{d}{dy}A & \beta\cdot\frac{d}{dx}B & 0 & 0 \\
-\alpha\cdot\frac{d}{dx}B & \beta\cdot\frac{d}{dy}B & -\gamma\cdot\frac{d}{dz}B & -\delta\cdot\frac{d}{dt}B \\
0 & \beta\cdot\frac{d}{dz}B & \gamma\cdot\frac{d}{dy}C & 0 \\
0 & \beta\cdot\frac{d}{dt}B & 0 & \delta\cdot\frac{d}{dy}D \\
\alpha\cdot\frac{d}{dz}A & 0 & \gamma\cdot\frac{d}{dx}C & 0 \\
0 & \beta\cdot\frac{d}{dz}B & \gamma\cdot\frac{d}{dy}C & 0 \\
-\alpha\cdot\frac{d}{dx}C & -\beta\cdot\frac{d}{dy}C & \gamma\cdot\frac{d}{dz}C & -\delta\cdot\frac{d}{dt}C \\
0 & 0 & \gamma\cdot\frac{d}{dt}C & \delta\cdot\frac{d}{dz}D \\
\alpha\cdot\frac{d}{dt}A & 0 & 0 & \delta\cdot\frac{d}{dx}D \\
0 & \beta\cdot\frac{d}{dt}B & 0 & \delta\cdot\frac{d}{dy}D \\
0 & 0 & \gamma\cdot\frac{d}{dt}C & \delta\cdot\frac{d}{dz}D \\
-\alpha\cdot\frac{d}{dx}D & -\beta\cdot\frac{d}{dy}D & -\gamma\cdot\frac{d}{dz}D & \delta\cdot\frac{d}{dt}D
\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}
\Gamma^{1}_{11} & \Gamma^{2}_{11} & \Gamma^{3}_{11} & \Gamma^{4}_{11} \\
\Gamma^{1}_{12} & \Gamma^{2}_{12} & \Gamma^{3}_{12} & \Gamma^{4}_{12} \\
\Gamma^{1}_{13} & \Gamma^{2}_{13} & \Gamma^{3}_{13} & \Gamma^{4}_{13} \\
\Gamma^{1}_{14} & \Gamma^{2}_{14} & \Gamma^{3}_{14} & \Gamma^{4}_{14} \\
\Gamma^{1}_{21} & \Gamma^{2}_{21} & \Gamma^{3}_{21} & \Gamma^{4}_{21} \\
\Gamma^{1}_{22} & \Gamma^{2}_{22} & \Gamma^{3}_{22} & \Gamma^{4}_{22} \\
\Gamma^{1}_{23} & \Gamma^{2}_{23} & \Gamma^{3}_{23} & \Gamma^{4}_{23} \\
\Gamma^{1}_{24} & \Gamma^{2}_{24} & \Gamma^{3}_{24} & \Gamma^{4}_{24} \\
\Gamma^{1}_{31} & \Gamma^{2}_{31} & \Gamma^{3}_{31} & \Gamma^{4}_{31} \\
\Gamma^{1}_{32} & \Gamma^{2}_{32} & \Gamma^{3}_{32} & \Gamma^{4}_{32} \\
\Gamma^{1}_{33} & \Gamma^{2}_{33} & \Gamma^{3}_{33} & \Gamma^{4}_{33} \\
\Gamma^{1}_{34} & \Gamma^{2}_{34} & \Gamma^{3}_{34} & \Gamma^{4}_{34} \\
\Gamma^{1}_{41} & \Gamma^{2}_{41} & \Gamma^{3}_{41} & \Gamma^{4}_{41} \\
\Gamma^{1}_{42} & \Gamma^{2}_{42} & \Gamma^{3}_{42} & \Gamma^{4}_{42} \\
\Gamma^{1}_{43} & \Gamma^{2}_{43} & \Gamma^{3}_{43} & \Gamma^{4}_{43} \\
\Gamma^{1}_{44} & \Gamma^{2}_{44} & \Gamma^{3}_{44} & \Gamma^{4}_{44}
\end{matrix}$$

تينسور ريتشي:

$$R_{ij} = R^{k}_{ijk}$$

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

أحد معامل تينسور ريتشي:

$$w11 := \beta \cdot \left(\frac{d^2}{dy^2} A\right) + \gamma \cdot \left(\frac{d^2}{dz^2} A\right) + \delta(x, y, z, t) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} A\right)$$

$$w12 := \beta \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} B\right) + \gamma \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} C\right) + \delta \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} D\right)$$

$$w13 := \left[\beta \cdot \left(\frac{d}{dx} B\right)\right]^2 + \left[\gamma \cdot \left(\frac{d}{dx} C\right)\right]^2 + \left[\delta \cdot \left(\frac{d}{dx} D\right)\right]^2$$

$$w14 := \alpha \cdot \left(\frac{d}{dx} A\right) \cdot \left[\beta \cdot \left(\frac{d}{dx} B\right) + \gamma \cdot \left(\frac{d}{dx} C\right) + \delta \cdot \left(\frac{d}{dx} D\right)\right]$$

$$w15 := \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} A\right) \cdot \left[\alpha \cdot \left(\frac{d}{dy} A\right) + \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} B\right) - \gamma \cdot \left(\frac{d}{dy} C\right) - \delta \cdot \left(\frac{d}{dy} D\right)\right]$$

$$w16 := \gamma \cdot \left(\frac{d}{dz} A\right) \cdot \left[\alpha \cdot \left(\frac{d}{dz} A\right) - \beta \cdot \left(\frac{d}{dz} B\right) + \gamma \cdot \left(\frac{d}{dz} C\right) - \delta \cdot \left(\frac{d}{dz} D\right)\right]$$

$$w17 := \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} A\right) \cdot \left[\alpha \cdot \left(\frac{d}{dt} A\right) - \beta \cdot \left(\frac{d}{dt} B\right) - \gamma \cdot \left(\frac{d}{dt} C\right) + \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} D\right)\right]$$

$$R11 := w11 + w12 - w13 - w14 - w15 - w16 - w17$$

معامل آخرلتينسور ريتشي:

$$R12 := \gamma\cdot\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}C\right)\right]+\delta\cdot\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}D\right)\right]-\gamma\cdot\gamma\cdot\left[\left(\frac{d}{dx}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right)\right]-\delta\cdot\delta\cdot\left[\left(\frac{d}{dx}D\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right)\right]$$

$$-\alpha\cdot\gamma\cdot\left[\left(\frac{d}{dy}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}C\right)\right]-\alpha\cdot\delta\cdot\left[\left(\frac{d}{dy}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}D\right)\right]-\beta\cdot\gamma\cdot\left[\left(\frac{d}{dx}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right)\right]-\beta\cdot\delta\cdot\left[\left(\frac{d}{dx}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right)\right]$$

عدد المعامل المستقلة في تينسور ريتشي هي 10 معامل، و هو قانون حقل الخلاء في نظرية النسبية العامة شريطة أن تكون كلّ من هذه العشرة معامل تساوي صفر، هذا ما فرضه و طرحه أنشتاين عام 1915. أعطى هذا القانون نتائج صادقة و صحيحة في إنحناء الضوء و أثر دوبلر و تقدم حضيض الكواكب.

تينسور ريمان:

$$R^{\mu}_{ijk} = \Gamma^{\mu}_{ik,j} - \Gamma^{\mu}_{ij,k} + \Gamma^{\mu}_{sj}\Gamma^{s}_{ik} - \Gamma^{\mu}_{sk}\Gamma^{s}_{ij}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\tau} R^{\tau}_{\nu\rho\sigma}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0$$

$$R_{1234} = 0$$

$$R1213 := \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dz}A\right)+\alpha\cdot\left(\frac{d}{dy}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}A\right)+\beta\cdot\left(\frac{d}{dy}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}B\right)+\gamma\cdot\left(\frac{d}{dz}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right)\right]$$

$$R1212 := -\left(\frac{d^2}{dy^2}A\right)-\left(\frac{d^2}{dx^2}B\right)+\alpha\cdot\left[\left(\frac{d}{dx}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}B\right)+\left(\frac{d}{dy}A\right)^2\right]+\beta\cdot\left[\left(\frac{d}{dy}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}B\right)+\left(\frac{d}{dx}B\right)^2\right]-\gamma\cdot\left(\frac{d}{dz}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}B\right)-\delta\cdot\left(\frac{d}{dt}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}A\right)$$

سلّميّة ريتشي:

يمكن تعين تقوس أو إنحناء الفضاء من خلال القيمة السلّمية لتينسور ريتشي:

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

$$w1 := \left(\frac{d^2}{dy^2}A\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2}B\right) - \alpha\cdot\left(\frac{d}{dy}A\right)^2 - \beta\cdot\left(\frac{d}{dy}B\right)^2 - \alpha\cdot\left(\frac{d}{dx}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}B\right) - \beta\cdot\left(\frac{d}{dy}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}B\right) + \gamma\cdot\left(\frac{d}{dz}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}B\right) + \delta\cdot\left(\frac{d}{dt}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}B\right)$$

$$w2 := \left(\frac{d^2}{dz^2}A\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2}C\right) - \alpha\cdot\left(\frac{d}{dz}A\right)^2 - \gamma\cdot\left(\frac{d}{dx}C\right)^2 - \alpha\cdot\left(\frac{d}{dx}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}C\right) + \beta\cdot\left(\frac{d}{dy}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right) - \gamma\cdot\left(\frac{d}{dz}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}C\right) + \delta\cdot\left(\frac{d}{dt}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}C\right)$$

$$w3 := \left(\frac{d^2}{dz^2}B\right) + \left(\frac{d^2}{dy^2}C\right) - \beta\cdot\left(\frac{d}{dz}B\right)^2 - \gamma\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right)^2 + \alpha\cdot\left(\frac{d}{dx}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}C\right) - \beta\cdot\left(\frac{d}{dy}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right) - \gamma\cdot\left(\frac{d}{dz}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}C\right) - \delta\cdot\left(\frac{d}{dt}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}C\right)$$

$$w4 := \left(\frac{d^2}{dt^2}A\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2}D\right) - \alpha\cdot\left(\frac{d}{dt}A\right)^2 - \delta\cdot\left(\frac{d}{dx}D\right)^2 - \alpha\cdot\left(\frac{d}{dx}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}D\right) + \beta\cdot\left(\frac{d}{dy}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right) + \gamma\cdot\left(\frac{d}{dz}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}D\right) - \delta\cdot\left(\frac{d}{dt}A\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}D\right)$$

$$w5 := \left(\frac{d^2}{dt^2}B\right) + \left(\frac{d^2}{dy^2}D\right) - \beta\cdot\left(\frac{d}{dt}B\right)^2 - \delta\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right)^2 + \alpha\cdot\left(\frac{d}{dx}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}D\right) - \beta\cdot\left(\frac{d}{dy}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right) + \gamma\cdot\left(\frac{d}{dz}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}D\right) - \delta\cdot\left(\frac{d}{dt}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}D\right)$$

$$w6 := \left(\frac{d^2}{dt^2}C\right) + \left(\frac{d^2}{dz^2}D\right) - \gamma\cdot\left(\frac{d}{dt}C\right)^2 - \delta\cdot\left(\frac{d}{dz}D\right)^2 + \alpha\cdot\left(\frac{d}{dx}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}D\right) + \beta\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right) - \gamma\cdot\left(\frac{d}{dz}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}D\right) - \delta\cdot\left(\frac{d}{dt}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}D\right)$$

Ricci Scalar

$$R := 4\cdot(\alpha\cdot\beta\cdot w1) + 4\cdot(\alpha\cdot\gamma\cdot w2) + 4\cdot(\beta\cdot\gamma\cdot w3) + 4\cdot(\alpha\cdot\delta\cdot w4) + 4\cdot(\beta\cdot\delta\cdot w5) + 4\cdot(\gamma\cdot\delta\cdot w6)$$

تينسور أنشتاين:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

أحد معامل هذا التينسور هي:

$$g1 := -\left(\frac{d^2}{dz^2}B\right) - \left(\frac{d^2}{dy^2}C\right) + \beta\cdot\left(\frac{d}{dz}B\right)^2 + \gamma\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right)^2 - \alpha\cdot\left[\left(\frac{d}{dx}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}C\right)\right] + \beta\cdot\left[\left(\frac{d}{dy}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}C\right)\right] + \gamma\cdot\left[\left(\frac{d}{dz}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}C\right)\right] - \delta\cdot\left[\left(\frac{d}{dt}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}C\right)\right]$$

$$g2 := -\left(\frac{d^2}{dt^2}B\right) - \left(\frac{d^2}{dy^2}D\right) + \beta\cdot\left(\frac{d}{dt}B\right)^2 + \delta\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right)^2 - \alpha\cdot\left[\left(\frac{d}{dx}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}D\right)\right] + \beta\cdot\left[\left(\frac{d}{dy}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right)\right] - \gamma\cdot\left[\left(\frac{d}{dz}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}D\right)\right] + \delta\cdot\left[\left(\frac{d}{dt}B\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}D\right)\right]$$

$$g3 := -\left(\frac{d^2}{dt^2}C\right) - \left(\frac{d^2}{dz^2}D\right) + \gamma\cdot\left(\frac{d}{dt}C\right)^2 + \delta\cdot\left(\frac{d}{dz}D\right)^2 - \alpha\cdot\left[\left(\frac{d}{dx}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}D\right)\right] - \beta\cdot\left[\left(\frac{d}{dy}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}D\right)\right] + \gamma\cdot\left[\left(\frac{d}{dz}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dz}D\right)\right] + \delta\cdot\left[\left(\frac{d}{dt}C\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}D\right)\right]$$

$$G11 := \left(\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha}\right)\cdot g1 + \left(\frac{\beta\cdot\delta}{\alpha}\right)\cdot g2 + \left(\frac{\gamma\cdot\delta}{\alpha}\right)\cdot g3$$

لمحاسبة معادلات خلأ أنشتاين يجب تعيين كل معامل هذا التينسور، من ثم أستنتاج الروابط من تساوي هذه الروابط مع الصفر(هذا التينسور هنا بهذا الشكل لفضاء يخلو من المادة).

مبدأ الكوسومولوجيا The Cosmological Principle

لهذا المبدأ أهمية كبيرة في نظرية النسبية العامة و يمكن القول بأن أهمية هذا المبدأ في النسبية العامة كأهمية مبدأ ماخ في النسبية الخاصة. يشترك هذا المبدأ من حيث المفهوم مع بعض مفاهيم مبدأ ماخ إلا أن حالته الأفتراضية تضع الكثير من التحفظات عليه ، فهو ليس كمبدأ حفاظ الطاقة، و لا تشجع الأرصاد الفلكية على تركه.

بمقياس واسع جداً ينصّ هذا المبدأ على أن: الكون متجانس و موحّد الخواص.

النموذج الكوني الذي يمكن الأستناد عليه هو أن نفرض الكون عبارة عن مجموعة لا متناهية من المجرات منتشرة في الكون و بنسبة متساوية و تبتعد كلّ عن الأخرى، يمكن أن نستنتج من هذا النموذج بأن جميع المجرات ذات نسبة متساوية للكون كلّه. يتنافى هذا النموذج مع فكرة عالم متناهي في فضاء لا متناهي. في هذا النموذج لا وجود لمراجع عطالة منتشرة كما هو الحال لمراجع العطالة في النموذج النيوتني المنتشرة فيه الى ما لا نهايه. التجانس و وحدة الخواص الكونية الموجودة حولنا أحد الدلائل على هذا المبدأ لكن من الصعب الأدعاء بأننا في المكان المثالي من الكون.

هناك نسخة كاملة من هذا الأصل و ضعت عام 1948 تنصّ على (الدوام) أو تجانس الكون ليس فضائياً فحسب و إنما كذلك زمنياً، بمعنى أن متوسط ظاهر الكون في كل زمان متساوي. ليس هناك بدآية و نهاية للكون! عندما يتوسع الكون لملأ الفضاء الناتج يجب أن توجد مادة كافية لملأ هذا الفضاء الفارغ. تتعدى هذه العبارة قانون حفاظ الطاقة لكن ليس بمقياس واسع و إنما حدود ذرة هيدروجين واحده في كل 60 كيلو مترمكعب من الفضاء في السنة. نالت هذه النظريه شهرة واسعة لكنما الأرصاد الفلكيه شككت بمصداقيتها مما أجبر حتى مدافعيها بالتخلي عنها.

مبدأ الكوسومولوجيا أو صيغته الكامله أو أي فرض آخر مشابه، عنواين لنسبية الكون، لذلك يمكن القول بأن كل معرفة كونية معتمدة على كهذه المباداً هي نظرية نسبية. يمكن تعريف النسبية بأنها كلّ نظريه فيزيائيه مع مجموعة من التحويلات التي لا تغير قوانين هذه النظرية. على سبيل المثال

الميكانيك النيوتني هو نسبية مجموعة غاليلو، النسبية الخاصة هي نسبية مجموع بوانكره أو مجموعة لورنتز، النسبية العامة هي نسبية مجموعة تحويلات واحد الى واحد، و العلوم الكونية الأخرى هي نسبية تناظرات مختلفه لكون واسع جداً. حتى النظريه التي تصدق في فضاء إقليدي مطلق شريطة أن يكون ذلك الفضاء متجانس فهي نسبية مجموعة من الدوران و الأنتقالات.

التعريف الأساسي للتجانس في هذا المبدأ هو، مجموعة الأرصاد الكونية للكون من مراقب، هي نفسها التي يؤديها مراقب آخر. الأرصاد التي نقوم بها نحن على الأرض (مثل توسع الكون و كثافة الكون) و هذه الأرصاد نفسها يقوم بها مراقبين في مجرة أخرى في زمن رصدها متكافئة. يسوقنا هذا الى مفهوم آخر وهو الزمن الكوني.

أحد نتائج هذا التجانس هو وجود لحظات مطلقة للكون كله، إن كانت هناك تغيرات في هذا الكون المتجانس فكل نقطة تعمل عمل التزامن. ننتخب مبدأ الزمن لساعة المرجع في زمن تتساوى فيه كل الأرصاد، في هذه الحالة نتائج هذه الأرصاد هي للزمن الكوني τ ، هذا الزمن الكوني هو في كلّ مجرة.

في عالم ثابت يمكن تنظيم الساعات كلها، حسب الزمن الكوني.

أهم مفاهيم المترية في نظرية النسبية العامة

أحد أهم موارد أستعمال مترية الزمكان هو محاسبة مسير الأشعه الضوئية، هذا المسير عبارة عن متقاصر أو جيوديسية هذه المترية. كذلك من خلال المترية يمكن تعين نوع الفضاء و تقوسه و محاسبة حقل جاذبيته. تتم هذه المحاسبات من خلال تينسور ريمان و ريتشي، و الأهم معادلات حقل أنشتاين سواء في الخلأ أم في حالة تواجد المادة في حقل الجاذبيه. سنبحث في هذا الفصل بعض أهم أنواع المتريات التي طرحت في نظرية النسبية العامة.

الصورة العامة لمترية في فضاء زمان هي:

$$ds^2 = Adt^2 + Bdx_1dt + \cdots Edx_1^2 + \cdots Hdx_2dx_3 + \cdots$$

المعامل A و B و غيرها هي توابع من t و x_1 و x_2 و غيرها. لكن في حقل ساكن الحالة الخاصة لهذه المترية هي:

$$ds^2 = Adt^2 - d\sigma^2$$

في هذه الرابطة $d\sigma^2$ هي $d\sigma^2 = dx_i^2$ و i= 1 و 2 و 3 فمثلاً $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$ فالخطوط العالمية لهذه المترية هي:

$$ds^2 = Adt^2$$

إذا كان φ هي جهد حقل جاذبيه و $A = c^2 e^{-\frac{2\varphi}{c^2}}$ إذن:

$$ds^2 = c^2 e^{-\frac{2\varphi}{c^2}} dt^2 - d\sigma^2$$

في حقل ضعيف معامل هذه المترية متساوية.

إذا أستعملنا هذا التقريب $e^{-\frac{2\varphi}{c^2}} \approx 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$ في هذه الحالة لحقل خارج الشمس $\left|\frac{2\varphi}{c^2}\right| < 0.5\times10^{-5}$ و من هذا تصبح معامل الإحداثية c^2dt^2 تقريباً تساوي واحد وهذا بمعنى أن الزمكان حول كتلة ضخمة مثل الشمس تقريباً منكوفسكي أي:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

من خلال مترية منكوفسكي و مترية شوارتزشيلد سنطالع الأرتبط بين فضاء منكوفسكي و فضاء شوارتزشيلد، و ذلك من خلال هذه التحويلات:

$$x = X\cosh T \qquad y = Y \qquad z = Z \qquad t = X\sinh T$$

إذن:

$$\frac{t}{x} = \tanh T \qquad x^2 - t^2 = X^2$$

كذلك:

$$\cosh^2 T - \cosh^2 T = 1$$

$$A = F(x,y) \Rightarrow dA = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$dx = \cosh TdX + X\sinh Tdt \Rightarrow dx^2 = dX^2\cosh^2 T + 2X\cosh T\sinh TdXdT + X^2\sinh^2 TdT^2$$

$$dt = \sinh TdX + X\cosh Tdt \Rightarrow dt^2 = dX^2\sinh^2 T + 2X\cosh T\sinh TdXdT + X^2\cosh^2 TdT^2$$

إذن:

$$dt^2 - dx^2 = X^2dT^2 - dX^2$$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \Rightarrow ds^2 = X^2dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

$$ds^2 = X^2dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

هذه مترية منكوفسكي في فضاء (X,Y,Z,T) رباعي الأبعاد.

مترية شوارتز شيلد هي:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) - c^2(1-\frac{2m}{r})dt^2$$

للتبسيط نكتبها بهذا الشكل:

$c = G = 1$ كذلك نستبدل r و t بهذه الإحداثيات R و T و نفرض $m = \frac{1}{4}$

نحصل على:

$$ds^2 = (1-\frac{1}{2R})dT^2 - (1-\frac{1}{2R})^{-1} dR^2 - R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

النقطه $R = \frac{1}{2}$ هي نقطه غامضه في هذه المترية

إذا فرضنا $2R-1 = x^2 - t^2 = X^2$ في هذه الحالة:

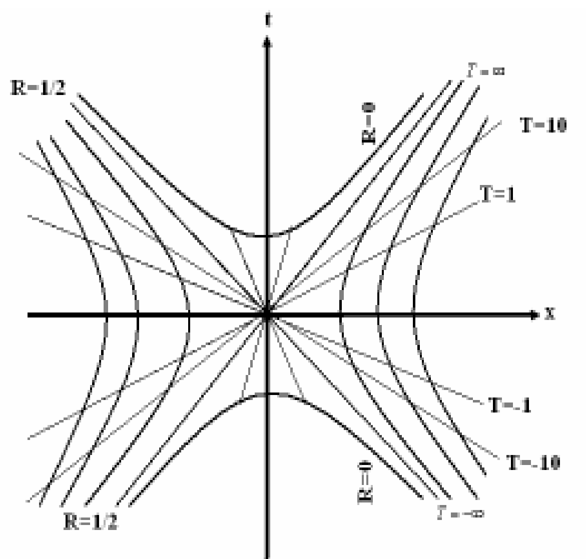
$$2R-1 = X^2 \Rightarrow 2dR = 2XdX \Rightarrow dX^2 = \frac{1}{X^2}dR^2$$

نحصل على:

$$ds^2 = X^2dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \Rightarrow ds^2 = (2R-1)dT^2 - (2R-1)^{-1}dR^2 - dY^2 - dZ^2$$

في هذه المترية يجب أن تكون $R > \frac{1}{2}$

هذه صيغة أخرى لمترية منكوفسكي و قد لاحظنا الأرتباط بين مترية منكوفسكي أو فضاء منكوفسكي و مترية شوارتزشيلد أو فضاء شوارتزشيلد



يمكن فرض هذا الشكل نموذج لفضاء كروسكال Kruskal.

إحداثية كروسكال هي:

$$ds^2 = \left[\frac{1}{2\mathrm{Re}^{2R}}\right](dt^2 - dx^2) - R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

في هذه المترية R تابع من $x^2 - t^2$ وتصدق فيه هذه الرابطه:

$$\left[e^{2R}\right](2R-1) = x^2 - t^2$$

تصدق هذه المترية في معادلات خلأ أنشتاين، هذه المترية في النقطة $R = 0$ غامضه و إذا كانت قيمة t في كلّ لحظة ثابته فهذه المترية ذات تناظر كروي. في هذه المترية خطوط ∓ 45 هي إحداثي كروسكال.

نكتب هذه المترية حسب إحداثيات T و R أي:

$$e^{2R}(2R-1) = x^2 - t^2 \Rightarrow dX^2 = \frac{2e^{2R}}{2R-1}dR^2$$

$$dt^2 - dx^2 = X^2 dT^2 + dX^2$$

إذن:

$$ds^2 = (\frac{2R-1}{2R})dT^2 - (\frac{2R-1}{2R})^{-1}dR^2 - R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

هذه المترية متكافئه مع مترية شوارتزشيلد (و النقطه الغامضه أو) أفق الحدث في هذه المترية هي النقطة $R = \frac{1}{2}$. تصدق هذه المترية في معادلات خلأ أنشتاين.

معادلات خلأ أنشتاين هي $R_{\mu\nu}=0$ إذا كان الحقل غير فارغ و هناك مادة في هذا الحقل في هذه الحالة $R_{\mu\nu}\neq 0$ و تصبح معادلات أنشتاين بهذا الشكل $R_{\mu\nu}=\Lambda g_{\mu\nu}$ سنبحث هذه المعادلات في الفصل القادم.

المترية التي تصدق في معادلات أنشتاين لحقل غير فارغ هي:

$$ds^2 = e^A dt^2 - e^B dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}A'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}A'^2 - \frac{B'}{r}$$

$$R_{22} = e^{-B}\left[1 + \frac{1}{2}r\left(A' - B'\right)\right] - 1$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$$

$$R_{44} = -e^{A-B}\left(\frac{1}{2}A'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}A'^2 - \frac{A'}{r}\right)$$

$R_{\mu\nu}=0$ إذا $\mu=\nu$

في حالة $R_{\mu\nu}=\Lambda g_{\mu\nu}$

$$A = -B$$

$$A' = -B'$$

$$e^A(1 + rA') = 1 - \Lambda r^2$$

نفرض $\alpha = e^A$

$$\alpha + r\alpha' = \left(r\alpha\right)' = 1 - \Lambda r^2$$

$$\alpha = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2$$

هذا الجواب يصدق في معادلات انشتاين $R_{\mu\nu}=\Lambda g_{\mu\nu}$ في هذه الرابطة m ثابت التكامل، ثم نحصل عل هذه المترية:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

مدار الحركة في فضاء هذه المترية تقريباً أشبه بمدار نيوتن في جهد مركزي $\varphi = -\frac{m}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2$

في حالة سعي m نحو الصفر أي $m \to 0$ تصبح مترية هذا الفضاء بهذا الشكل:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2 - \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

تعرف هذه المترية بمترية دي سيتّر (de sitter) في القوانين الكونية كشفها عام 1917، و الفضاء الناتج من هذه المترية هو فضاء دي سيتّر. تمثل هذه المترية فضاء شبه كروي ذو تقوس قيمته $-\frac{1}{3}\Lambda$ هذه أشبه بمترية شوارتزشلد لكن النقطة $r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ هي أفق الحدث في هذه المترية . في حالة $m \neq 0$ يصبح مبدأ الإحداثية (نقطةغامضه أو) أفق الحدث لمترية دي سيتّر.

إذا كانت المعادلات $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ هي الحاكمة على فضاء فارغ في هذه الحالة فضاء دي سيتّر هو البديل لفضاء منكوفسكي.

المترية الأخرى التي سنبحثها هي المترية الناتجة من نموذج ميلن Milen الذي طرحه عام 1932. يستند هذا النموذج على مبدأ الكوسومولوجيا (الكون متجانس فضائياً و زمنياً) في فضاء فارغ منكوفسكي رباعي الأبعاد مع غضّ النظر عن الجاذبيه لمجموعة لا متناهية لذرات عديمة الوزن و الحجم، ذات سرعة تنتشر في كلّ جهات الفضاء. تنتشر هذه الذرات من مبدأ الإحداثي O في المرجع $S(x, y, z, t)$ بسرعة أقلّ من سرعة الضوء. يمكن فرض هذه الذرات المنتشرة بكرة غبار لا حدود لها و سرعة توسعها تساوي سرعة الضوء. يصدق قانون هابل في هذه الكرة و الذي ينصّ على تناسب السرعة و الفاصلة. حدود المادة في هذا النموذج أشبه بصدر موجة wavefront.

لأستنتاج هذه المترية نبدأ من مترية منكوفسكي في M_4

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

الفرضيات:

الزمن الكوني τ و ρ إحداثية جديدة (ليست الكثافة) و $u = \frac{r}{t}$

$$\rho = \sinh\psi \quad و \quad t = \tau\cosh\psi \quad و \quad r = c\tau\sinh\psi$$

إذن:

$$\tau = t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$c\rho = u\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

نصل من هذه الروابط الى المترية التاليه:

$$ds^2 = c^2d\tau^2 - c^2\tau^2\left\{\frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right\}$$

إذا فرضنا أن الزمن الكوني ثابت يعني $d\tau = 0$ إذن:

$$d\sigma^2 = c^2\tau^2\left\{\frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right\}$$

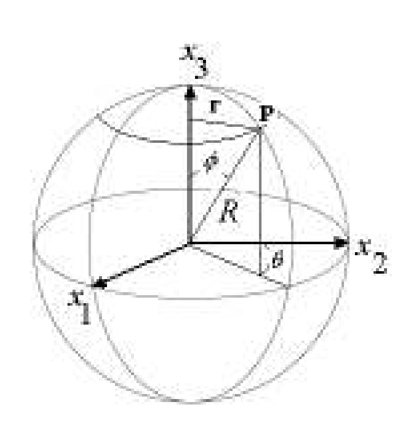
العبارة داخل { } تمثل فضاء ذو تقوس ثابت أي $K = -1$ في نفس الوقت تمثل $d\sigma^2$ فضاء تقوسه $-\frac{1}{c^2\tau^2}$

(ضرب مترية ما في عامل ثابت مثل A يؤدي الى أزدياد كلّ معامل هذه المترية بنسبة A و نقصان تقوس فضاء هذه المترية بنسبة $\frac{1}{A^2}$)

إذن نموذج ميلن عبارة عن فضاء ثلاثي الأبعاد ذو تقوس سالب و ثابت $K=-\frac{1}{c^2\tau^2}$

آخر مترية نتناول بحثها هي مترية روبرتسون واكر Robertson-Walker metric

R نصف قطر دائره في فضاء شبه إقليدي رباعي الأبعاد و k ضريب



$$dl^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{1}{k}R^2k \qquad k=\pm 1 \;\text{و}\; k\to 0$$

$$dl^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{1}{k}R^2k \Rightarrow x_4^2=\frac{1}{k}R^2k-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

$$x_4dx_4=-(x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3)\Rightarrow x_4^2dx_4^2=(x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3)^2$$

$$dx_4^2=\frac{(x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3)^2}{\frac{1}{k}R^2k-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

إذن:

$$dl^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+\frac{(x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3)^2}{\frac{1}{k}R^2k-x_1^2-x_2^2-x_3^2} \qquad \text{I}$$

نستعين بهذه التحويلات:

$$x_1=Rr\cos\phi\sin\theta$$
$$x_2=Rr\sin\phi\sin\theta$$
$$x_3=Rr\cos\theta$$

$$dx_1 = R\cos\phi\sin\theta dr - Rr\cos\phi\cos\theta d\theta + Rr\sin\phi\sin\theta d\phi$$
$$dx_2 = R\sin\phi\sin\theta dr - Rr\sin\phi\cos\theta d\theta - Rr\cos\phi\sin\theta d\phi$$
$$dx_3 = R\cos\theta dr + Rr\sin\theta d\theta$$

نضع هذه الروابط في المعادله I نحصل على:

$$dl^2 = R^2(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2)$$

في هذه الرابطه dl^2 مستقله عن الزمن

أستناداً على مبدأ الكوسومولوجيا بأن الكون متجانس (homogenous) و متحد الخواص (isotropic) في هذه الحالة: $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$ ، و نفرض بأن الكون يتسوع و هذا التوسع تابع للزمن أي: $R \to R(t)$ إذن:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2)$$

تُعرف هذه المترية، بمترية روبرتسون- واكر

قانون الجاذبيه لأنشتاين

طبقا لقانون نيوتن في الجاذبيه أن حقل الجاذبية الموجود في أي نقطة من الفضاء تُعيّنه الكتلة أو بالأحرى توزيع المادة الموجودة في في ذلك الفضاء، لذلك يمكن تعين تينسور يقوم بربط المادة بحقل الجاذبية. أولاً يجب البحث عن تينسور يربط توزيع المادة بإحداثيات الزمكان، ثم ربط ذلك التينسور بتينسورالجيوديسة. التينسور الذي يأدي هذه الوظائف هو تينسور الطاقه – ممنتوم، أستناداً للنسبية الخاصة هناك تكافؤ بين الطاقة و الكتلة لذلك يمكن القول بأن جميع القوى لها تأثير على حقل الجاذبية بما فيها الطاقه الكهرومغناطيسيه.

أستناداً لقوانين نيوتن إذا كانت μ كثافة المادة الموجودة في فضاء فإن حقل الجاذبية في ذلك الفضاء يمكن تعينه من خلال دالة الجهد φ التي تصدق في هذه الرابطه:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\mu$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4\pi G\mu$$

G في هذه الرابطة هي ثابت الجاذبيه العام لنيوتن

القانون الجديد للجاذبيه الذي نحن في صدده يجب أن تكون $\nabla^2\varphi = 4\pi G\mu$ هي أحد نتائجه، و بما أن هذا القانون يضم إشتقاق من الدرجة الثانيه و كذلك حقل الجاذبية فيه متناسب مع كثافة المادة لذلك يجب البحث عن تينسوريضمّ هذه الخصائص. تينسور أنشتاين يملك جميع هذه الخصائص و نكتبه بهذا الشكل:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\kappa T_{ij}$$

في هذه الرابطه κ ضريب متناسب مع ثابت الجاذبيه العام لنيوتن، و هو تينسور الطاقه – ممنتوم. تنطبق نتائج هذا القانون على نتائج الأرصاد الفلكية للمجرات.
الصيغه السلّمية لهذا القانون هي:

$$R = \kappa T$$

لذلك:

$$R_{ij} = \kappa(\frac{1}{2} g_{ij} T - T_{ij})$$

كذلك:

من هذه الرابطه يمكن أستنتاج:

$$R_{44} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \varphi$$

إذا كان حقل الجهد السلّمي لنيوتن في حقل جاذبيه ضعيف و ساكن في هذه الحالة:

$$g_{44} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

حلّ شوارتز شيلد

نبدأ من هذه المترية او المترية

$$ds^2 = adr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - bc^2dt^2$$

هذه المترية ذات تقارن كروي و a و b توابع من r و قيمة كلاهما تقريباً واحد، وc سرعة الضوء في الخلأ،

المتغيرات في هذه المترية هنّ:

$$x^1 = r \quad \text{و} \quad x^2 = \theta \quad \text{و} \quad x^3 = \phi \quad \text{و} \quad x^4 = t$$

هذه المترية هي لفضاء خالي من المادة، ماعدى جسم كروي مركزه منطبق على مركز الإحداثي. خارج هذا الجسم تينسور الطاقه – ممنتوم صفر، و تينسور ريتشي $R_{ij} = 0$ و هذا يستطلب أن تصبح كل معامل هذا التينسور مساوية للصفر.

$$g_{11} = a$$
$$g_{22} = r^2$$
$$g_{33} = r^2 \sin^2\theta$$
$$g_{44} = -bc^2$$
$$g = -abc^2r^2\sin^2\theta$$

$$g^{11} = \frac{1}{a}$$

$$g^{22} = \frac{1}{r^2}$$

$$g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

$$g^{44} = -\frac{1}{bc^2}$$

علائم كريستوفل

علائم كريستوفل ليست بتينسور و هي متقارنه بالنسبه ل i و j

نحسب قيمة هذه العلائم من الروابط المذكوره في الفصل السابق و العلائم المخالفه للصفر هي كالآتي:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{a'}{2a}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = \frac{b'}{2b}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{r}{a}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{r}{a}\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{c^2 b'}{2a}$$

a' و b' إشتقاق بالنسبه للمتغير r

تينسور ريتشي لهذا المترية

$$R_{ij} = R^k_{ijk}$$

المعامل المخالفة للصفر في تينسور ريتشي هي :

إذن:

$$R_{11}=\frac{b''}{2b}-\frac{b'^2}{4b^2}-\frac{a'b'}{4ab}-\frac{a'}{ar}$$
$$R_{22}=\frac{rb'}{2ab}-\frac{ra'}{2a^2}+\frac{1}{a}-1$$
$$R_{33}=R_{22}\sin^2\theta$$
$$R_{44}=c^2(-\frac{b''}{2a}+\frac{b'^2}{4ab}+\frac{a'b'}{4a^2}-\frac{b'}{ar})$$

تقوس فضاء أو أنطواء الفضاء لهذه المترية هو:

$$R=g^{ij}R_{ij}$$

$$R=\frac{b''}{ab}-\frac{b'^2}{2ab^2}-\frac{a'b'}{2a^2b}+\frac{2b'}{abr}-\frac{2a'}{a^2r}+\frac{2}{ar^2}-\frac{2}{r^2}$$

في قانون الجاذبيه لأنشتاين جميع معامل تينسور ريتشي تساوي صفر، أي:

$$\frac{b''}{2b}-\frac{b'^2}{4b^2}-\frac{a'b'}{4ab}-\frac{a'}{ar}=0$$
$$\frac{rb'}{2ab}-\frac{ra'}{2a^2}+\frac{1}{a}-1=0$$
$$-\frac{b''}{2a}+\frac{b'^2}{4ab}+\frac{a'b'}{4a^2}-\frac{b'}{ar}=0$$

نستنتج من الرابطة الاولى و الثالثه هذه الرابطه:

$$ab'+a'b=0$$

لهذا

ثابت = a .b ، (اي قيمه ثابته)

$$\lim_{r\to\infty} a \to 1$$
$$\lim_{r\to\infty} b \to 1$$
$$ab = 1$$

نحذف b من المعادله $\frac{rb'}{2ab} - \frac{ra'}{2a^2} + \frac{1}{a} - 1 = 0$ نحصل على

$$ra' = a(1-a)$$

من تكامل هذه الرابطة نحصل على

$$a = \frac{1}{1 - {}^{2m}\!/_{r}}$$

في هذه الرابطه m ثابت التكامل، ثم نحصل على

$$b = 1 - {}^{2m}\!/_{r}$$

تصبح المترية لهذا الفضاء بهذا الشكل:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) - c^2(1-\frac{2m}{r})dt^2 \qquad \text{I}$$

هذه المترية ذات تقارن كروي و تُعبر عن حقل جاذبيه خارج جسم كروي، مركز الإحداثي الكروي منطبق على مركز هذا الجسم. إحداثيات هذا الإحداثي هي (r,θ,ϕ) هذه المترية أو اوضعها شوارتزشيلد. سنثبت لاحقاً ان m متناسبة مع كتلة الجسم.

- نفرض أن $m = \frac{GM}{c^2}$
- G في هذه الرابطه هو ثابت الجاذبيه العام لنيوتن
- M الكتله
- c سرعة الضوء في الخلأ

النتيجه النهائيه هي:

$$ds^2 = adr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - bc^2 dt^2 \qquad II$$

من تساوي معامل إحداثية الزمان لكلا هاتين المتريبتين I و II نحصل على:

$$bc^2 = c^2(1 - 2m/r)$$

و من هذه الرابطه $m = \frac{GM}{c^2}$ نحصل على:

$$b = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

إذا كانت b = 0 إذن $r = 2m = \frac{2GM}{c^2}$

الحدّ الأدنى لقيمة r بمجاورة حقل جاذبية الأرض:

كتلة الأرض $M = 5.9742 \times 10^{24} kg$

ثابت الجاذبيه $G = 6.67428 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$

سرعة الضوء $c = 299\ 792\ 458\ \frac{\mathrm{m}}{s}$

في حدود 9 ملي متر، لذلك يجب أن يكون شعاع هذا الجسم الكروي أكبر من 9 ملى متر كي تصبح قيمة الإحداثيه الرابعه أو بعد الزمان مخالفاً للصفر و كذلك ذو قيمه سالبه.

لو وضعنا هذه القيمه $m=\frac{GM}{c^2}$ في سلّميّة ريتشي

$$R=\frac{b''}{ab}-\frac{b'^2}{2ab^2}-\frac{a'b'}{2a^2b}+\frac{2b'}{abr}-\frac{2a'}{a^2r}+\frac{2}{ar^2}-\frac{2}{r^2}$$

تكون النتيجه $R=+\frac{4m}{r^3}$

شعاع الأرض6378000 متر = r لذلك تقوس الفضاء الناتج عن حقل جاذبية الأرض أو كتلة الأرض حدود $6.8\times10^{-23}\ {}^{1}\!/_{m^2}$

من بين نتائج مترية شوارتزشيلد نظرية الثقوب السوادء، حيث فيها نصف قطر شوارتزشيلد $r=\frac{2GM}{c^2}$

مدار الكواكب

قوة جاذبية الكواكب على الشمس تؤدي الى تباطئ تعجيل الشمس بالنسبة لإحداثي ساكن، إذا فرضنا إن الإحداثي يتحرك مع الشمس أضافة على حقل جاذبية الشمس و الكواكب هناك حقل جاذبيه ينتج من التعجيل في هذا الإحداثي. إذا فرضنا أن مركز الإحداثي الكروي منطبق على مركز الشمس و متقاصرة أو جيوديسية شوارتزشيلد هي التي تعين إحداثيات هذا الإحداثي، و جميع الكواكب حكمها حكم ذرات لها حقول جاذبيه ضعيف جداً يمكن غضّ النظر عنه، جميع المنحنيات في هذا الفضاء هي جيوديسية إحداثياتها زمان – مكان.

نضع مقادير a و b من هذه الروابط ثم نحسب علائم كريستوفل.

$$a = \frac{1}{1 - {2m}/{r}}$$

$$b = 1 - {2m}/{r}$$

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^4_{14} = \frac{m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma^1_{22} = -(r-2m)$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta$$

$$\Gamma^1_{33} = -(r-2m)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{mc^2}{r^3}(r-2m)$$

نضع هذه الروابط في المعادله العموميه للجيوديسيه

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

النتيجه أربع روابط بهذا الشكل:

$$\frac{d^2r}{ds^2}-\frac{m}{r(r-2m)}(\frac{dr}{ds})^2-(r-2m)\left\{(\frac{d\theta}{ds})^2+\sin^2\theta(\frac{d\phi}{ds})^2-\frac{mc^2}{r^3}(\frac{dt}{ds})^2\right\}=0$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\sin\theta\cos\theta(\frac{d\phi}{ds})^2=0$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}+2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{2m}{r(r-2m)}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}=0$$

كذلك مترية شوارتزشيلد

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2-c^2(1-\frac{2m}{r})dt^2$$

إنتخاب الإحداثي الكروي يتم على هذا الغرار بأن الكواكب تبدأ حركتها في الصفحة $\theta=\frac{\pi}{2}$ و في بدآية

الحركه يكون $\frac{d\theta}{ds}=0$ لذلك تصبح هذه المعادلات بهذا الشكل:

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{2m}{r(r-2m)}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}=0$$

$$\frac{r}{r-2m}(\frac{dr}{ds})^2+r^2(\frac{d\phi}{ds})^2-\frac{c^2}{r}(r-2m)(\frac{dt}{ds})^2=1$$

نفرض هذين الفرضين $w=\frac{d\phi}{ds}$ و $w=\frac{d\phi}{ds}$ و نضعهما في المعادلات الاولى و الثانيه (تغير المتغير)

$$\frac{dw}{dr}+\frac{2}{r}w=0$$

$$\frac{dv}{dr}+\frac{2m}{r(r-2m)}=0$$

يعطي تكامل هذه الروابط هذه النتيجه:

$$w=\frac{d\phi}{ds}=\frac{\alpha}{r^2}$$

$$v=\frac{dt}{ds}=\frac{\beta r}{r-2m}$$

نضع $\frac{d\phi}{ds}$ و $\frac{dt}{ds}$ في المعادله $1=\frac{r}{r-2m}(\frac{dr}{ds})^2+r^2(\frac{d\phi}{ds})^2-\frac{c^2}{r}(r-2m)(\frac{dt}{ds})^2$ النتيجه:

$$(\frac{dr}{ds})^2+\frac{\alpha^2}{r^3}(r-2m)=1+c^2\beta^2-\frac{2m}{r}$$

نحذف sd بين هذه المعادله و المعادله $w=\frac{d\phi}{ds}=\frac{\alpha}{r^2}$ النتيجه معادلة مدار الكواكب:

$$(\frac{\alpha}{r^2}\frac{dr}{d\phi})^2+\frac{\alpha^2}{r^2}=1+c^2\beta^2-\frac{2m}{r}+\frac{2m\alpha^2}{r^3}$$

نضع $u=\frac{1}{r}$ تصبح هذه المعادله بهذا الشكل:

$$(\frac{du}{d\phi})^2+u^2=\frac{1+c^2\beta^2}{\alpha^2}-\frac{2m}{\alpha^2}u+2mu^3$$

إشتقاق من هذه المعادله بالنسبه ل ϕ:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=-\frac{m}{\alpha^2}+3mu^2$$

معادلة مدار الكواكب و السيارات في الميكانيك الكلاسيكي هي:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{GM}{h^2}$$

في هذه المعادله M كتلة الجسم الجاذب (ذو الجاذبيه العاليه) و h سرعة عزم السياره بالنسبة لمحور الجاذبيه أي:

$$r^2\frac{d\phi}{dt}=h$$

المعادله التي تشابه هذه المعادلة في النسبية العامة هي المعادلة $w=\frac{d\phi}{ds}=\frac{\alpha}{r^2}$ و استناداً على مترية شوارتزشيلد فأن $ds=icdt$ لذلك المعادله $w=\frac{d\phi}{ds}=\frac{\alpha}{r^2}$ هي تشابه هذه المعادله:

$$r^2\frac{d\phi}{dt}=ic\alpha$$

لذا $h=ic\alpha$ و تصبح المعادله $\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=-\frac{m}{\alpha^2}+3mu^2$ بهذا الشكل:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{mc^2}{h^2}+3mu^2$$

(سنستعين بهذه المعادلة في الفصل القادم لمحاسبة إنحناء الضوء)

إذا غضينا النظر عن $3mu^2$ تصبح هذه المعادله مساوية للمعادلة الكلاسيكيه بشرط أن تكون $m=\frac{GM}{c^2}$.

نسبة $3mu^2$ الى $\frac{mc^2}{h^2}$ تساوي:

$$\frac{3h^2u^2}{c^2}=\frac{3}{c^2}r^2\phi^2$$

$r\phi$ هي أحد معامل حركة السيارات و عطارد لها النصيب الأكبر من بين سيارات المنظومه الشمسيه أي 48 كيلو متر في الثانيه و هذه النسبه قيمتها هي 7.7×10^{-8} قيمتها صغيره جداً .

جواب المعادله الكلاسيكيه $\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{GM}{h^2}$ هو:

$$u = \frac{\mu}{h^2}\{1 + e\cos(\phi - \omega)\}$$

في هذه الرابطه:

$\mu = GM = mc^2$ و e خروج عن المركز (eccentricity) و ω طول الحضيض (longitude of (perihelion

هذا الجواب أشبه بجواب المعادلة الناتجة من النسبية العامة $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mc^2}{h^2} + 3mu^2$ مع خطأ يمكن غضّ النظر عنه هو :

$$3mu^2 = \frac{3m\mu^2}{h^4}\{1 + e\cos(\phi - \omega)\}^2$$

المعادله النهائيه:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} + \frac{3m\mu^2}{h^4}\{1 + e\cos(\phi - \omega)\}^2$$

جواب هذه المعادله:

$$u = \frac{\mu}{h^2}\left\{1 + e\cos(\phi - \omega) + \frac{3m\mu e}{h^2}\phi\sin(\phi - \omega)\right\}$$

من خلال بعض الروابط المثلثاتيه و غضّ النظر عن عبارة صغيرة جداً هي $\delta\omega^2$ و فرض $\delta\omega = \frac{3m\mu\phi}{h^2}$ نصل الى هذه المعادله:

$$u = \frac{\mu}{h^2}\{1 + e\cos(\phi - \omega - \delta\omega)\}$$

لو قايسنا هذه المعادله مع المعادله الكلاسيكيه $u = \frac{\mu}{h^2}\{1 + e\cos(\phi - \omega)\}$ لوجدنا الزاويه $\delta\omega$ هي تقدم نقطة الحضيض لمدار السيارت، هذه الزاويه هي أحد نتائج النسبية العامة و التي أثبتت صحتها الارصاد الفلكية خصوصاً تقدم نقطة حضيض عطارد، حيث عجز الميكانيك الكلاسيكي من إعطاء برهان رياضي عليها.

إستناداً على هذه المعادله يجب أضافة طول الحضيض على الدوام طبقاً لهذه الرابطه:

$$\delta\omega = \frac{3m\mu}{h^2}\phi = \frac{3\mu^2}{c^2h^2}\phi = \frac{3\mu}{c^2 l}\phi$$

في هذه الرابطه:

$$\mu = GM_{sun} \Rightarrow \mu = \left(6.67\times10^{-11}\,\frac{m^3}{kgs^2}\right)\times\left(1.99\times10^{30}\,kg\right) = 1.327\times10^{20}\,\frac{m^3}{s^2}$$

$$l = \frac{h^2}{\mu}$$

$$h = \sqrt{\left(1-e^2\right)\mu a}$$

$$\phi = 2\pi$$

$$\delta\omega = \frac{3GM}{c^2\,\frac{h^2}{\mu}}\phi = \frac{6\pi GM}{c^2\left(1-e^2\right)a}$$

$$\delta\omega = \frac{6\pi GM}{c^2\left(1-e^2\right)a}$$

لكوكب عطارد:

نصف قطر مدار عطارد حول الشمس (القطر الأطول) $a = 5.79\times10^{10}\,m$

خروج عن المركز لمدارعطارد $e = 0.206$

سرعة الضوء $c = 299\ 792\ 458\ \frac{\mathrm{m}}{s}$

إذن : $\delta\omega = 5.019775\times10^{-7}\,radian$

واحد راديان يساوي $\frac{360°}{2\pi}\times60'\times60'' = \left(2.0626\times10^5\right)''/radian$ ثانيه من الدرجه على راديان

إذن:

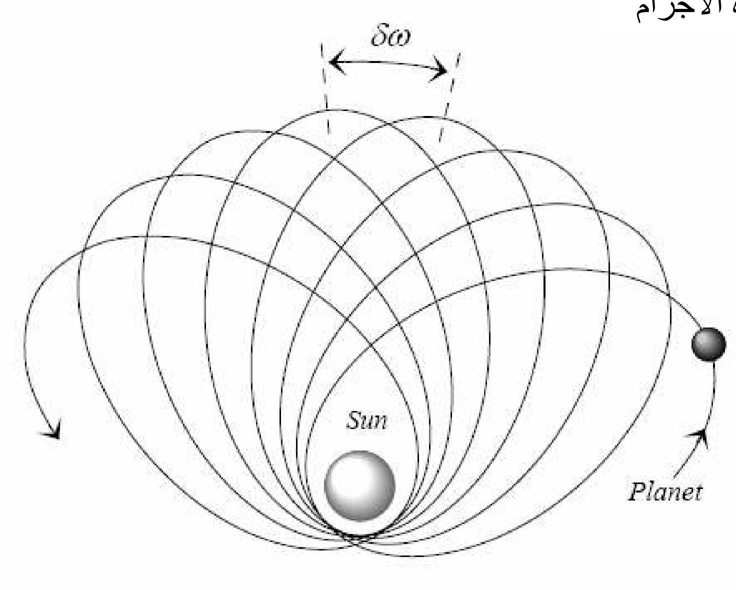
$$\delta\omega = 5.019775\times10^{-7}\,radian\times\left(2.0626\times10^5\right)''/radian = 0.10354''$$

السنه العطارديه 88 يوم و السنه الأرضيه 365.25 إذن تقدم نقطة حضيض عطارد في السنه الأرضيه يساوي:

$$\delta\omega = \frac{365.25}{88} \times 0.10354'' = 0.4297''$$

في مائة سنه أرضيه يكون تقدم نقطة حضيض عطارد حدود 43 ثانيه. هذه أحد أهم نتائج النسبية العامة و أكدت الأرصاد الفلكيه صحة هذه النتيجة.

تقدم نقطة الحضيض فى القرن لهذه الأجرام



عطارد $43''.0$

الزهره $8''.3$

الأرض $3''.8$

إنحراف مسير الضوء

في فضاء تحكم عليه مترية شوارتز شيلد

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 - c^2(1-\frac{2m}{r})dt^2$$

يقطع الضوء الفاصله بين نقطتين في هذا الفضاء على مسير متقاصر أو جيوديسية أي $ds = 0$ كذلك توصلنا لهذه المعادله في الفصل السابق:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mc^2}{h^2} + 3mu^2$$

$h = \infty$ لأن $ds = 0$ (راجع معادلات الفصل السابق وضع $ds = 0$) تصبح المعادله بهذه الصوره:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2$$

لو غضينا النظر عن الطرف الأيمن للمعادله يصبح جواب هذه المعادله في إحداثي قطبي خط مستقيم بهذا الشكل:

$$u = \frac{1}{R}\cos(\phi + \alpha)$$

R و α ثوابت التكامل، إذا كان حقل الجاذبيه ضعيف فمسير حركة الضوء عبارة عن خطوط مستقيمه. فرضنا في الفصل السابق و لخصنا مترية شوارتزشيلد في صفحة الأستواء أي $\theta = 0$ كذلك نفرض ان مسير حركة الضوء بموازات الخطوط $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ و هذا يستطلب $\alpha = 0$. نضع هذا الجواب مع هذا الفرض الأخير في الطرف الأيمن للمعادله تصبح:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3m}{R^2}\cos^2\phi$$

جواب هذه المعادله الإشتقاقيه (مع العلم بأن جواب خاص هذه المعادله $\frac{m}{R^2}\left(2 - \cos^2\phi\right)$) هو:

$$u=\frac{1}{R}\cos\phi+\frac{m}{R^2}\left(2-\cos^2\phi\right)$$

في بداية و نهاية هذا الشعاع الضوئي $u=0$ لذلك:

$$\frac{m}{R}\cos^2\phi-\cos\phi-\frac{2m}{R}=0$$

هذه معادله درجه ثانيه ذات جوابين الجواب ذو القيمه الأقلّ هو:

$$\cos\phi=-\frac{2m}{R}$$

لذلك في إنتهاء هذا الشعاع الضوئي يكون

$$\phi=\pm\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2m}{R}\right)$$

لذلك إنحراف مسيرالضوء نتيجة عبوره من حقل جاذبيه قوي يساوي:

$$\frac{4m}{R}$$

في هذه الرابطه $m=\frac{GM}{c^2}$ إذن:

$$\frac{4GM}{c^2R}$$

مقدارإنحراف شعاع ضوئي مماس لسطح الشمس عن مسيره الأفقي يساوي:

كتلة الشمس $M=1.99\times10^{30}kg$

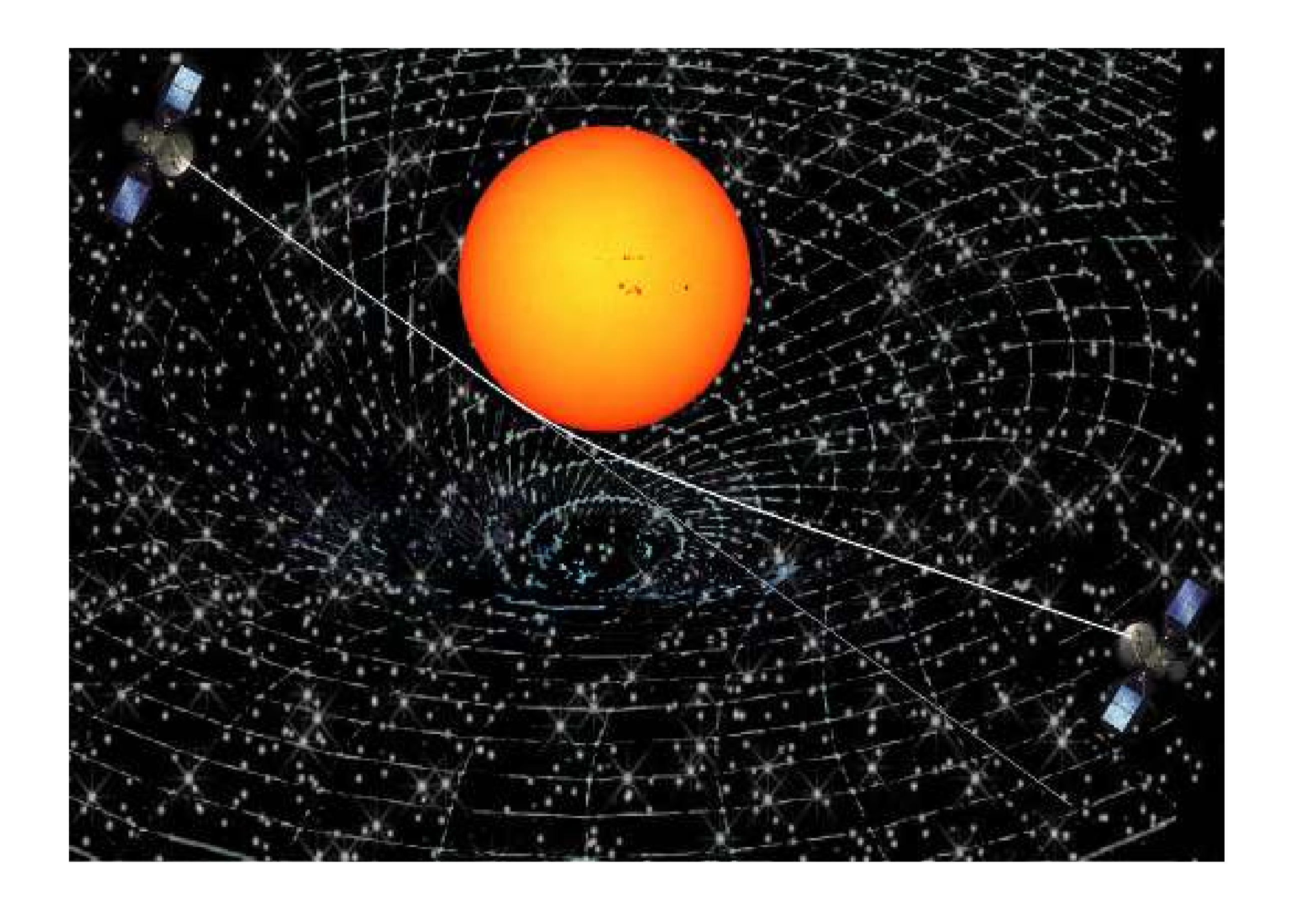
سرعة الضوء في الخلأ $c=299\ 792\ 458\ \frac{\mathrm{m}}{s}$

ثابت الجاذبيه العام لنيوتن $G=6.67\times10^{-11}\frac{m^3}{kgs^2}$

نصف قطر الشمس $R=6.95\times10^{8}m$

$$\frac{4\times 6.67\times 10^{-11}\,\frac{m^3}{kgs^2}\times 1.99\times 10^{30}\,kg}{\left(299\,792\,458\ \frac{\mathrm{m}}{s}\right)^2\times 6.95\times 10^{8}\,m}=8.5\times 10^{-6}\,radian=1.75''$$

أي: إنحراف مسير الضوء عند عبوره من على سطح الشمس يساوي 1.75 ثانيه من الدرجه. هذه النتيجه النظريه الناتجه عن هذه المحاسبات كانت مساويه للنتيجه العمليه الحاصله من رصد الضوء الساطع من كوكب قرب قرص الشمس عند كسوف كامل للشمس. تسمى هذه الظاهره بعدسة الجاذبيه.



إنزياح الطيف

الإنزياح نحو الأحمر: يصدر الجسم المعتم الساخن طيف ضوئي تتعلق شدة هذا الطيف بدرجة حرارة هذا الجسم، لا تستثنى نجوم السماء من هذه الخاصية فكل نجم من نجوم السماء يصدر طيف ضوئي خاص به و بمكوناته وبدرجة حرارته. عند دراسة الطيف الصادر من بعض النجوم في مجرة درب التبانة، شاهد المتخصصين بهذا المجال، فقدان بعض ألوان طيف هذه النجوم كذلك شاهدوا إنزياح ألوان الطيف نحو اللون الأحمر.

لو راجعنا ظاهرة دوبلر في أختلاف تواتر الأمواج الصادرة من منبع موجي متحرك لوجدنا أرتفاع توتر الموج القادم نحونا و إنخفاض توتر الموج المبتعد عننا، هذه الظاهره لجميع الأمواج سواء الصوتيه أم الضوئيه (الألكترومغناطيسيه) إذ كان منبع الضوء يبتعد عننا فهو ذو توتر منخفض أي طيف هذا المنبع الضوئي منزاح نحو الأحمر و إذا كان منبع الضوء يقترب نحونا فطيفه ذو توتر عالى أي منزاح نحو الأزرق أو البنفسجي .

إذا كان الكون في حالة سكون ففي هذه الحالة مجموع الإنزياحات نحو الأحمر تساوي مجموع الإنزياحات نحو الأزرق بينما عملياً سجلت الأرصاد الفلكيه أن طيف جميع المجرات منزاح نحو الأحمر و نسبة هذا الإنزياح تتناسب طردياً مع بُعد المجرة عن الأرض و هذا يؤيد فكرة الكون المتسع.

لم تفسر نظرية نيوتن علة الإنزياح نحو الأحمر في الطيف الصادر من النجوم حتى فسرت النسبية العامة هذه الظاهرة و أرجعت السبب الى حقل الجاذبيه ، و نسبياً أطلقت على هذه الظاهرة الإنزياح نحو الأحمر بالجاذبيه (Gravitational redshift) ، و هي لو أن نجماً ذو حقل جاذبية قوي يصدر شعاع ضوئي ، تردد هذا الشعاع الضوئي قرب هذا النجم نتيجة هذا الحقل ، عالي جداً ، إذن هو منزاح نحو البنفسجي ، لكن كلما أبتعد هذا الشعاع الضوئي عن هذا النجم ، قلّ أثر حقل الجاذبية عليه و بالتالي ينخفض تردده ، يؤدي إنخفاض التردد الى إنزياح لون هذا الشعاع الضوئي نحو الأحمر.

ساعة المرجع التي يقاس بها الزمن يمكن أن تكون أي وسيله ذات حركه تناوبيه منتظمه وغير متمايزه. إذا كانت A و B حادثتان بمجاورة ساعة المرجع و الحادثه B وقعت بعد الحادثه A في هذه الحاله إحداثية الزمن للحادثه B أكبر من إحداثية الزمن للحادثه A.

نفرض أن A و B بدآية و نهاية حادثتان كذلك C و D لحادثتان في مرجع آخر. الرابطه الهندسيه في الزمكان بين A و B مساويه للرابطه الهندسيه بين C و D، لكلا هاتين الحالتين من الحوادث يتم قياس الزمان في فاصلتان متساويتان من الجيوديسه ds ، إذن:

$$\int ds$$

$$ds^2 = g_{ii}\left(dx^i\right)^2$$

x^i إحداثيات حادثه في مرجع زمكان الإحداثيات x^1 و x^2 و x^3 فيزيائياً إحداثيات فضاء الإحداثي المرجع و $\frac{x^4}{ic}$ عباره عن الزمن. إذا كانت الساعة التي يقاس بها زمن حدوث هذه الحوادث ساكنه بالنسبه للمرجع ففي هذه الحالة $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ لذلك:

$$ds^2 = g_{44}\left(dx^2\right)^2 = -c^2 g_{44} dt^2$$

في هذه الرابطه $x^4 = tci$ ، إذن الرابطه للفاصله s التي t إحداثية الزمن في النقطه (x^1 و x^2 و x^3) هي:

$$s = ic\int\sqrt{g_{44}}dt$$

في هذه الرابطه s خياليه و ذلك لأن ds بين فاصلتين زمنيتين خياليتين، و يمكن تدريج الساعه المرجع، بحيث $T = \frac{s}{ic}$ و ستصبح الرابطة بين الزمن T في الساعه المرجع و إحداثية الزمن t بهذه الصوره:

$$T = \int\sqrt{g_{44}}dt$$

إذا كان حقل الجاذبيه ضعيف و ساكن، في هذه الحاله g_{44} حسب الجهد السلّمي لنيوتن φ هي:

$$g_{44} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

لذلك:

$$dT = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}}dt$$

إنتشارالطيف الصادر من ذرة يعتبر كساعة معيار، إذن الفاصله الزمنيه التي تناظر تناوب إنتشار خطوط الطيف الصادرة من ذرتين متشابهتين ساكنتين في مكانين متفاوتين متساوية. إذا كانت هذه الفاصله الزمنيه dT و φ_1 و φ_2 الجهد السلّمي في حقل جاذبيه هاتين الذرتين و dt_1 و dt_2 دوره تناوبيه كامله حسب إحداثية الزمن. من الرابطة $dT = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}}dt$ نحصل على:

$$dT = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}}dt_1 = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}dt_2$$

ثم نحصل على:

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}}}$$

نفرض إن الذرات في حالة تشعشع (أو ومضات ضوئيه) في نقطة من حقل جاذبيه، و t_a إحداثيه زمنيه لقمة الموجه الناتجه من أشعاعات هذه الذرة و t_b إحداثيه زمنيه لقمة موج ثانيه و t'_a و t'_b الزمن الذي يستغرق من لحظة صدور هذه الومضات أو الأشعاعات حتى وصولها لتلك النقطة من حقل الجاذبية، بما إن هذين المرجعين ساكنين فالفاصله الزمنيه من لحظة صدور قمة موج حتى و صولها لهذه النقطه ثابته، إذن:

$$t'_a - t_a = t'_b - t_b \Rightarrow t'_a - t'_b = t_a - t_b$$

من هذه الرابطه يتضح أن تذبذب هذه الذرة في هذه النقطة مستقل عن مكان هذه النقطة ويساوي الفاصله الزمنيه لتذبذب كل من هاتين الذرتين حسب الساعة الموجودة في مكان تواجد الذرة نفسها، إذا كان ν_1 و ν_2 تذبذب خطوط طيف هذه الذرتين في هذه النقطة، إذن:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}}{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}}$$

من بعض الأعمال الجبريه على هذه الرابطه نصل الى:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}} &\Rightarrow \left(1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{V_1}{c^2} \\ \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}} &\Rightarrow \left(1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{\varphi_2}{c^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}}} \simeq 1 + \frac{\varphi_1}{c^2} - \frac{\varphi_2}{c^2}$$

في هذه الروابط قدّ غضيّنا النظر عن العبارات الصغيرة جداً كالعبارة $\frac{\varphi_2 \varphi_1}{c^4}$

إذن:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}$$

مثلاً لذرة واقعة على سطح الشمس و أخرى مشابة لها على سطح الأرض في هذه الحالة:

سرعة الضوء في الخلأ	$c = 299\ 792\ 458\ \frac{\mathrm{m}}{s}$
ثابت الجاذبيه العام لنيوتن	$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{m^3}{kgs^2}$
كتلةالشمس	$M_s = 1.99 \times 10^{30}\,kg$
نصف قطر الشمس	$R_s = 6.95 \times 10^{8}\,m$
كتلة الأرض	$M_e = 5.97 \times 10^{24}\,kg$
نصف قطر الأرض	$R_e = 6356000m$

جهد الجاذبيه Gravitational Potential عند نقطه في مجال (حقل) الجاذبيه هو،الشغل المبذول لنقل وحدة الكتله من هذه النقطه الى مالا نهايه. بعباره أخرى $\varphi = -\frac{GM}{R}$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_e &= -\frac{GM_e}{R_e} = -6.27 \times 10^{7}\\ \varphi_s &= -\frac{GM_s}{R_s} = -1.907 \times 10^{11}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\nu_e}{\nu_s} = 1 + \frac{\varphi_e - \varphi_s}{c^2} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} \simeq 1.00000212$$

هذه القيمه صغيرة جداً و لايمكن قياسها، لكن لو أستبدلنا الشمس بشعري اليمانية فالنتيجه ثلاثين مرة أكبر من هذه القيمة و النتيجه تنطبق على نتائج الأرصاد الفلكيه.

معادلات الحقل عند تواجد المادة

سنبحث في هذا الفصل الحقل في حالة وجود المادة فيه، ثم نستنتج معادلات حقل أنشتاين. معادلات حقل خلأ انشتاين $R_{\mu\nu}=0$ أشبه لمعادلات لابلاس لدالة الجهد النيوتني في فضاء فارغ $\Delta^2\varphi=0$ ، لكن إذا أردنا أستنتاج معادلات حقل جاذبيه متأثراً بالمادة أو الكتلة الموجودة فيه (يمكن أن تكون هذه المادة مثلاً الكتلة الموجودة داخل الأرض أو الغبار و الدخان الموجود في الكون) في هذه الحالة نحن بحاجة الى النظرية النسبية العامة المتكافئة مع معادلات بواسون (poisson) $\Delta^2\varphi=4\pi\rho G$ (في هذه المعادله G ثابت الجاذبيه الكوني لنيوتن و ρ الكثافة).

للحصول على معادلات الحقل الماديّ يجب أن يكون تينسور ريتشي مساوي لتينسور مخالف للصفر، التينسور المناسب هو التينسور اللا متغير للطاقة $T^{\mu\nu}$، لا يمكن التساوي بين تينسور لا متغير $T^{\mu\nu}$ مع تينسور متغير $R_{\mu\nu}$

نكتب التينسور $R_{\mu\nu}$ بصيغة لا متغير بهذه الصورة:

$$R^{\mu\nu}=g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}R_{\rho\sigma}$$

إذن:

$$R^{\mu\nu}=-kT^{\mu\nu}$$

في هذه الرابطة k ثابت و العلامة السالبه لتسهيل بعض العمليات الحسابيه ليس لها تأثير فيزيائي. أحد الأستنتاجات التي يمكن أستنتاجها من هذه الرابطه هي أستلزام $T^{\mu\nu}=0$ في الزمكان المسطح. بما إن الفضاء يتقوس جزئياً أثر وجود المادة فيه لذلك قيمة k في هذه الرابطة صغيرة و يمكن غضّ النظر عنها في الزمكان المسطح.

في الهندسه الريمانيه أستناداً على متطابقة بيانكي

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right)_{;\nu}=0$$

في هذه الرابطه العلامه خارج القوسين هي التفاضل المطلق، و الرابطه بين التفاضل المطلق و التفاضل اللا متغير هي:

$$\frac{D}{ds} A_{\nu}^{\mu} = A_{\nu}^{\mu} \left(\frac{dx^{\sigma}}{ds} \right)$$

إذا كان $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ يستلزم هذا $R_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ متطابقة بيانكي تستوجب $R_{;\nu} = R_{,\nu}$

إذن:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -kT^{\mu\nu}$$

هذه هي معادلات حقل أنشتاين التي طرحها عام 1915. إذا ضربنا طرفين هذه المعادله في $g_{\mu\nu}$ كذلك نستعين بهذه الروابط من حساب التينسور:

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$$

دلتاي كرونكر δ_{ij} تعريفها بهذه الصيغه:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{if} \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{44} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

نحصل على هذه المعادلات:

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = -k g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$R - \frac{1}{2}(1+1+1+1)R = -kT \Rightarrow R = kT$$

$$R = kT$$

لذلك يمكن كتابة $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -kT^{\mu\nu}$ بهذه الصوره:

$$R^{\mu\nu} = -k(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T)$$

من نتائج هذه المعادلات:

1- في الخلأ $T^{\mu\nu} = 0$ و تصبح هذه المعادلات بصورة $R^{\mu\nu} = 0$ و هذه النتيجه متكافئة مع $R_{\mu\nu} = 0$

2- معادلات هذا الحقل هي حسب $g_{\mu\nu}$ و مشتقاتها فهي غير خطية لذلك لا يمكن جمع نتائج هذه المعادلات، على سبيل المثال الحقل الكروي هو ليس مجموع حقلين كل منهما هو نصف كره. لكي يعطي عمومية أكثر لمعادلات الحقل، غضّ أنشتاين النظر عن هذه الحالة اللا خطية و ذلك بأضافة ثابت كوني لهذه المعادلات هو Λ ، هذا الثابت يمكن أن يكون سالب، موجب أو صفر. بحضور هذا الثابت الكوني تصبح معادلات الحقل بهذه الصوره:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = -kT^{\mu\nu}$$

الثابت الكوني Λ مشابه الى R تقوس الفضاء و وحدته $\frac{1}{m^2}$ ، إذا كانت قيمة Λ موجبة فتأثيره مضاد للجاذبيه. يمكن الأستفادة من هذا الثابت في نموذج كوني منبسط مع تعجيل. حسب التخمينات، القيمة المطلقة لهذا الثابت هي في حدود $|\Lambda| < 10^{-50} \frac{1}{m^2}$ في المحاسبات اللا كونيه يمكن غضّ النظر عن هذا الثابت.

إذا ضربنا هذه الرابطة في $g_{\mu\nu}$ نحصل على:

$$R = kT + 4\Lambda$$

و من هذه الرابطة نحصل على:

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} - k(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T)$$

في الزمكان المسطح و في غياب المادة هذه الرابطة بصورة:

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu}$$

كل فضاء تصدق فيه هذه الرابطه هو فضاء أنشتاين، و كل فضاء ذو تقوس ثابت هو فضاء أنشتاين لكن، لا كل فضاء تقوسه ثابت (سوى فضاء ثلاثي الأبعاد) هو فضاء أنشتاين.
في هذه الروابط و المعادلات k هو ثابت الجاذبيه العام الأنشتاين و يساوي:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \Rightarrow k = 2.073 \times 10^{-43} \frac{s^2}{kg.m}$$

G ثابت الجاذبيه الكوني لنيوتن و c سرعة الضوء. أثر هذا الثابت في حدود المنظومه الشمسيه قليل جداً و يمكن غضّ النظر عنه.

إذا كانت الكتلة في الفضاء عبارة عن غبار في هذه الحالة يمكن تعين قيمة الطاقة من هذه الرابطة $T = c^2 \rho$ في هذه الرابطه c سرعة الضوء و ρ الكثافة.

ديناميكيا الكون

- **إستناداً على النظريه الشبه نيوتنيه**

قبل البدأ بالديناميكيا الكونيه لنظرية النسبيه العامه الأفضل أن نبدأ بالنظريه الشبه نيوتنيه لأستنتاج معادله و نموذج يمكن إنتزاعه لاحقاً من نظرية النسبية العامة.

نبدأ من معادلة بواسون $\Delta^2\varphi = 4\pi\rho G$ في هذه المعادله ρ الكثافه و هي دالة المتغيرفيها الزمن أي $\rho(t)$. نفرض أن الزمان الذي يحيط بالمراقب الواقف في النقطة P هو فضاء ذو تناظر كروي، و لايمكن ان تكون φ في هذه النقطة ما لا نهايه و جوابها هو $\varphi = a + b\sigma + c\sigma^2 + d\sigma^3 + ...$ في هذا التساوي σ الفاصله في الفضاء الإقليدي من النقطة P ، أو بالأحرى كرة مركزها النقطة P. أحد أجوبة φ هي:

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi G\rho\sigma^2$$

معادلات نيوتن للحركه الدورانيه هي $\ddot{\sigma} = -\frac{d\varphi}{d\sigma}$ لذلك $\ddot{\sigma} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\sigma$ إذا فرضنا أن الفضاء حول النقطة P هو كره نصف قطرها σ و الكتلة الموجودة في هذه الكرة هي M' لهذا $M' = \frac{4}{3}\pi\rho\sigma^3$ إذن:

$$\ddot{\sigma} = -\frac{GM'}{\sigma^2}$$

إذا فرضنا أن الفواصل في حدود المجرات و الفاصله من المجرة Q الى النقطة P تساوي r في هذه الحالة الكتلة الموجودة في هذه الفاصلة من الفضاء ثابته و لا تتغير مع الزمن، لأن في حالة أنبساط الفضاء فأن المادة لا تدخل و لا تخرج من هذه الكرة و هذا أستناداً على قانون نيوتن في الحفاظ. إذا فرضنا أن الفاصله بين المجرة Q و المجرة P

عبارة عن الدالة $R(t)$ هذه دالة متغيرها الزمن إذن:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}$$

في هذه الرابطة $\ddot{R}=\frac{d^2R}{dt^2}$ و $M=\frac{M'}{h}$ هنا h ثابت فلكي و M الكتلة الموجودة في كره نصف قطرها $R(t)$

لقد فرضنا أن جواب φ حسب الفاصله σ بصورة $\varphi=a+b\sigma+c\sigma^2+d\sigma^3+...$ و توصلنا الى الجواب $\varphi=\frac{2}{3}\pi G\rho\sigma^2$ بما أن $\frac{2}{3}\pi G\rho$ هو ثابت لذلك يمكن فرض جواب آخر مع ثابت آخر كالثابت Λ و سنحصل على جواب آخر هو $\varphi=-\frac{1}{6}c^2\Lambda\sigma^2$ إذا أستعنا بأتفاقية الجمع أو التراكب و جمعنا هذين الجوابين سنحصل على:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}=\frac{4}{3}\pi\rho G\sigma-\frac{1}{3}c^2\Lambda\sigma$$

لقد فرضنا أن الفاصلة بين المجرتين Q و P عباره عن الداله $R(t)$ لهذا $R=\sigma$ و $\ddot{R}=\ddot{\sigma}$ إذن:

$$\ddot{R}=-\frac{4}{3}\pi\rho GR+\frac{1}{3}c^2\Lambda R\Rightarrow\ddot{R}=-\frac{GM}{R^2}+\frac{c^2\Lambda R}{3}$$

نضرب طرفين المعادله $\ddot{R}=-\frac{GM}{R^2}+\frac{c^2\Lambda R}{3}$ في $2\dot{R}$ (هذا الضرب عباره عن تكامل) مع العلم أن $2\dot{R}\ddot{R}=\left(\dot{R}^2\right)'$ و $2R\dot{R}=\left(R\right)'$ و $-\frac{2\dot{R}}{R}=\left(\frac{2}{R}\right)'$ نصل الى:

$$\dot{R}^2=\frac{2GM}{R}+\frac{c^2\Lambda R^2}{3}-\tilde{k}c^2$$

في هذه الرابطه $-\tilde{k}c^2$ ثابت التكامل إذا فرضنا أن $C=2GM$ نصل الى هذه المعادله:

$$\dot{R}^2=\frac{C}{R}+\frac{c^2\Lambda}{3}R^2-\tilde{k}c^2$$

تعمدنا في هذه المعادلات بالأستفاده من ثوابت خاصه و ذلك للتوفيق بين هذه المعادله و المعادله التي سنستنجها من ميكانيك النسبية العامة:

- **إستناداً على نظريه النسبية العامة**

نبدأ هذا البحث بمترية روبرتسون – واكر

في هذه المترية $k = \mp 1$ و $k = 0$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{1-kr^2} dr^2 - R^2(t) r^2 d\theta^2 - R^2(t) r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

معادلات حقل أنشتاين لهذه المترية:

$$G_{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = -kT^{\mu\nu}$$

$$A = g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1-kr^2} \qquad \alpha = -\frac{1-kr^2}{2R^2(t)}$$

$$B = g_{22} = -R^2(t) r^2 \qquad \beta = -\frac{1}{2R^2(t) r^2}$$

$$C = g_{33} = -R^2(t) r^2 \sin^2 \theta \qquad \gamma = -\frac{1}{2R^2(t) r^2 \sin^2 \theta}$$

$$D = g_{44} = c^2 \qquad \delta = \frac{1}{2c^2}$$

إذن:

$$\frac{G_{11}}{g^{11}}=\frac{G_{22}}{g^{22}}=\frac{G_{33}}{g^{33}}=-\frac{2\ddot{R}}{Rc^2}-\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2}-\frac{k}{R^2}+\Lambda$$

$$\frac{G_{44}}{g^{44}}=-\frac{3\dot{R}^2}{R^2c^2}-\frac{3k}{R^2}+\Lambda$$

كذلك يمكن مراجعة المثال الثامن.

إذا كانت $\mu \neq \nu$ في هذه الحاله $G_{\mu\nu}=0$ كذلك $T=c^2\rho$ (في هذه الرابطة T الطاقة و c سرعة الضوء و ρ الكثافة) إذا وضعنا هذه الرابطه و المعادلتين أعلاه في قانون حقل عام أنشتاين

$$G_{\mu\nu}=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

سنحصل على هذين الشرطين:

الطرف الأيمن في هذه المعادلة هو $-\frac{8\pi GP}{c^4}$ قيمة الضغط P صفر

$$\frac{2\ddot{R}}{Rc^2}+\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2}+\frac{k}{R^2}-\Lambda=0$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2}+\frac{k}{R^2}-\frac{\Lambda}{3}=\frac{8\pi\rho G}{3c^2}$$

إذا نقصنا المعادله الثانيه من المعادله الأولى نحصل على:

$$\frac{\ddot{R}}{R}=\frac{\Lambda c^2}{3}-\frac{4\pi\rho G}{3}$$

نضرب طرفين المعادله $\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2}+\frac{k}{R^2}-\frac{\Lambda}{3}=\frac{8\pi\rho G}{3c^2}$ في R^3 نحصل على:

$$\dot{R}^2R+kc^2R-\frac{\Lambda c^2R^3}{3}=\frac{8\pi\rho G}{3}R^3$$

إشتقاق الطرف الأيسر يساوي $2\ddot{R}\dot{R}R+\dot{R}^3+kc^2\dot{R}-\Lambda c^2\dot{R}R^2$

نضرب طرفين المعادله $\frac{2\ddot{R}}{Rc^2}+\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2}+\frac{k}{R^2}-\Lambda=0$ في $\dot{R}R^2$ نحصل على

$$\frac{2\ddot{R}}{Rc^2}+\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2}+\frac{k}{R^2}-\Lambda=0\Rightarrow 2\ddot{R}\dot{R}R+\dot{R}^3+kc^2\dot{R}-\Lambda c^2\dot{R}R^2=0$$

الآن يمكن أن نستنتج أن تفاضل الرابطه $\frac{8\pi\rho G}{3}R^3$ يساوي صفر إذن تكامل هذه الرابطه يساوي عدد ثابت مثل C أي:

$$\left(\frac{8\pi\rho G}{3}R^3\right)'=0\Rightarrow\frac{8\pi\rho G}{3}R^3=C$$

إذا و ضعنا هذه النتيجه أي $\frac{8\pi\rho G}{3}R^3=C$ في المعادله $\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2}+\frac{k}{R^2}-\frac{\Lambda}{3}=\frac{8\pi\rho G}{3c^2}$ نحصل على:

$$\dot{R}^2=\frac{C}{R}+\frac{\Lambda c^2R^2}{3}-kc^2$$

هذه هي المعادلة الإشتقاقية لفريدمان و قد تمكنا من إستنتاجها من النظرية الشبه نيوتنية و من نظرية النسبية العامة. تمثل هذه المعادله حدود النسبية العامة في النموذج " الغباري" لروبرتسون – واكر، لسنا هنا بصدد حلّ هذه المعادلة و البحث في نتائجها، يمكن مراجعة المصادر للتعرف على هذه المعادلة و أجوبتها. في نموذج فريدمان هناك نتائج شيقة للكون يمكن إستنتاجها من هذه المعادلة و حلها، كذلك يمكن مقايسة ناتج هذا الحلّ مع النموذج الشبه نيوتني.

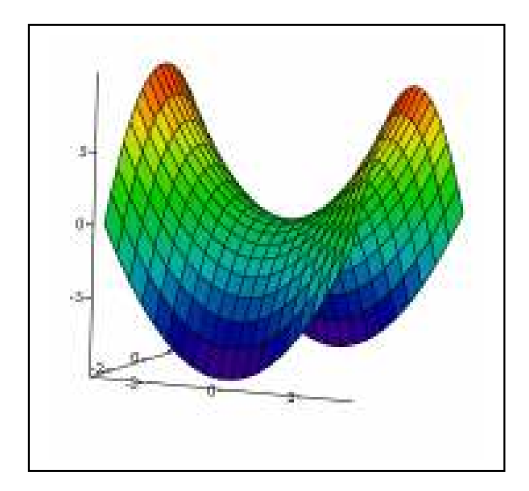
في النسبية العامة ثابت التقوس k هو بديل الثابت النيوتني $\tilde{k}$ "للطاقة" في معادلة فريدمان. في جميع النماذج النيوتنية يفرض إن الفضاء مسطح أي $\tilde{k}=0$ ، لهذا فالنموذج النسبي العام الوحيد الذي هندسياً يشابه النموذج النيوتني هو النموذج الذي فيه $k=0$. نماذج النسبية العامة التي فيها $k=\pm 1$ تشابه نظائرها النيوتنية التي فيها $\tilde{k}=\mp 1$ هذا التشابه هو تشابه موضعي، أي الدالة $R^2(t)$ لكلا هذان النموذجان مساوية أما فضاء النسبية متقوس. من مقايسة هذان النموذجان، إذا كانت الطاقة الكنماتيكية المحلية أكبر من طاقة الهروب، في النسبية العامة تقوس الفضاء سالب، وإذا كانت أقلّ فتقوس الفضاء موجب. إستناداً على ثابت هابل، طاقة الهروب متناسبة مع الكثافة الكونيه، لذلك ناتج الكثافة العالية هو كون مغلق و ناتج الكثافة القليلة كون مفتوح.


الأمثله

المثال 1

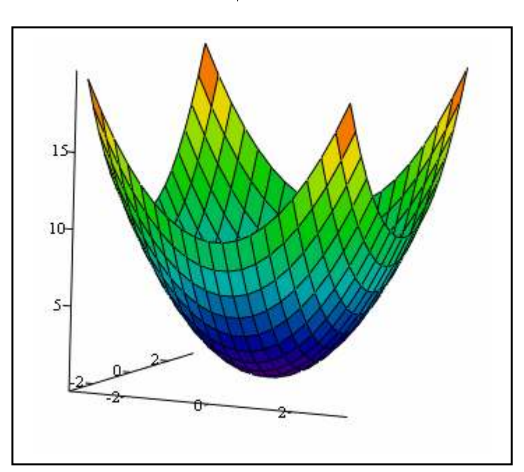
المطلوب مترية كلّ من هذه السطوح:

Hyperbolic Paraboloid
مجسم مكافئ هذلولي



$z=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$

Paraboloid
مجسم مكافئ



$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$

المجسم المكافئ:
إحداثيات التحويل لهذه المترية هي:

$$\begin{vmatrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{vmatrix}$$

إذن:

$$\begin{vmatrix} x=r\cos\theta \Rightarrow dx=\cos\theta dr+r\sin\theta d\theta \\ y=r\sin\theta \Rightarrow dy=\sin\theta dr-r\cos\theta d\theta \end{vmatrix}$$

$$z=\frac{a}{2}\left(\left(r\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\right)^2\right)=\frac{ar^2}{2}\Rightarrow dz=ardr$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2\Rightarrow ds^2=\left(1+a^2r^2\right)dr^2+r^2d\theta^2$$

المجسم المكافئ الهذلولي:

هذا المجسم هو سطح غير دوراني و مترية هذا السطح هي اكثر تعقيد من مترية السطوح الدورانية، يعرف هذا المجسم كذلك بالشكل السرجي (saddle-shaped). لإستنتاج مترية هذا الشكل نستعين بهذه التحويلات:

$$\begin{cases} x = r + \theta \\ y = r - \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r + \theta \Rightarrow dx = dr + d\theta \\ y = r - \theta \Rightarrow dy = dr - d\theta \end{cases}$$

$$z = \frac{a}{2}\left((r+\theta)^2 + (r-\theta)^2\right) \Rightarrow z = 2ar\theta \Rightarrow dz = 2a\theta dr + 2ard\theta$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow ds^2 = \left(2 + 4a^2\theta^2\right)dr^2 + 8ar\theta drd\theta + \left(2 + 4a^2r^2\right)d\theta^2$$

$$\begin{cases} g_{11} = g_{rr} = 2 + 4a^2\theta^2 \\ g_{21} = g_{\theta r} = 8ar\theta \\ g_{22} = g_{\theta\theta} = 2 + 4a^2r^2 \end{cases} \Rightarrow ds^2 = g_{rr}dr^2 + g_{\theta r}drd\theta + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

كذلك يمكن الإستعانة بهذه التحويلات:

$$\begin{cases} x = r\cosh\theta \\ y = r\sinh\theta \end{cases}$$

المثال 2

معادلة المجسّم المكافئ بهذا الشكل:

$$z = \frac{1}{2} a\left(x^2 + y^2\right)$$

المطلوب إنحناء ريتشي و إنحناء غاوس لهذا المجسم. في هذه الرابطة a مقدار ثابت أكبر من الصفر.

الحل: هذه مسئلة في الهندسة التفاضلية يمكن حلها من خلال تينسور ريمان

نكتب معادلة هذا المجسّم المكافئ في الإحداثي القطبي، التحويلات هي:

$$\begin{vmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(1 + a^2 r^2\right) dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} = 1 + a^2 r^2 \\ g_{22} = r^2 \end{vmatrix} \quad g_{21} = g_{12} = 0 \qquad \begin{vmatrix} g^{11} = \dfrac{1}{1 + a^2 r^2} \\ g^{22} = \dfrac{1}{r^2} \end{vmatrix} \quad g^{21} = g^{12} = 0$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \Rightarrow \Gamma^1_{11} = \frac{a^2 r}{1 + a^2 r^2}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} \Rightarrow \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \Rightarrow \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{1 + a^2 r^2}$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} \Rightarrow \Gamma^2_{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \Rightarrow \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \Rightarrow \Gamma^2_{22} = 0$$

سلميّة ريتشي لهذا السطح الدوراني يمكن حسابها من خلال تينسور ريمان و تينسور ريتشي بهذا الصورة:

$$R_{1212}=g_{22}\left(\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial\theta}-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial r}+\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12}\right)$$

$$R_{1212}=g_{22}\left(-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial r}+\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12}\right)$$

$$R_{1212}=g_{22}\left(-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial r}+\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12}\right)\Rightarrow R_{1212}=r^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{a^2}{1+a^2r^2}-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{a^2r^2}{1+a^2r^2}$$

$$R_{11}=g^{22}R_{1212}=\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{a^2r^2}{1+a^2r^2}\right)=\frac{a^2}{1+a^2r^2}$$

$$R_{22}=g^{11}R_{1212}=\left(\frac{1}{1+a^2r^2}\right)\left(\frac{a^2r^2}{1+a^2r^2}\right)=\frac{a^2r^2}{\left(1+a^2r^2\right)^2}$$

$$R=g^{ij}R_{ij}=g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}=\left(\frac{1}{1+a^2r^2}\right)\left(\frac{a^2}{1+a^2r^2}\right)+\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{a^2r^2}{\left(1+a^2r^2\right)^2}\right)=\frac{2a^2}{\left(1+a^2r^2\right)^2}$$

$$R=\frac{2a^2}{\left(1+a^2r^2\right)^2}$$

إنحناء غاوس لهذا المجسم حسب هذا القانون:

$$K=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\Gamma^s_{11}}{\partial\theta}-\frac{\partial\Gamma^s_{12}}{\partial r}+\Gamma^r_{11}\Gamma^s_{r2}-\Gamma^r_{12}\Gamma^s_{r1}\right]g_{s2}$$

في هذا القانون $r=1,2$ و $s=1,2$ و بما أن $g_{21}=g_{12}=0$ لذلك:

$$K=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\Gamma_{11}^{2}}{\partial\theta}-\frac{\partial\Gamma_{12}^{2}}{\partial r}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{21}^{2}\right]g_{22}$$

هو:

$$K=\frac{1}{r^{2}(1+a^{2}r^{2})}\left[-\frac{\partial\Gamma_{12}^{2}}{\partial r}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{21}^{2}\right]r^{2}\Rightarrow K=\frac{1}{r^{2}(1+a^{2}r^{2})}\left[\frac{1}{r^{2}}+\frac{a^{2}}{1+a^{2}r^{2}}-\frac{1}{r^{2}}\right]r^{2}$$

$$K=\frac{a^{2}}{\left(1+a^{2}r^{2}\right)^{2}}$$

المثال 3

مترية زمكان بهذا الشكل:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + e^{-2ax}dt^2$$

a مقدار ثابت. المطلوب:

- أحسب كل علائم كريستوفل المخالفة للصفر لهذه المترية.
- عيّن معامل تينسور ريمان.
- الإنحناء السلّمي
- من معادلة حقل أنشتاين أوجد معامل تينسور الطاقة لهذا الفضاء.
- أوجد معادلة الجيوديسي $x(t)$ لهذا الفضاء.

نفرض: $x^1 = x$ و $x^2 = y$ و $x^3 = z$ و $x^4 = t$

علائم كريستوفل المخالفة للصفر هي:

$$\left.\begin{matrix} g_{11} = -1 \\ g_{22} = -1 \\ g_{33} = -1 \\ g_{44} = e^{-2ax} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left| \begin{matrix} \Gamma^1_{44} = \dfrac{1}{2g_{11}}\dfrac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma^1_{44} = -ae^{-2ax} \\ \Gamma^4_{14} = -\dfrac{1}{2g_{44}}\dfrac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma^4_{14} = -a \end{matrix}\right.$$

معامل تينسور ريمان و ريتشي:

$$R_{11} = R^4_{141} = \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^4} - \frac{\Gamma^4_{14}}{\partial x^1} + \Gamma^4_{s4}\Gamma^s_{11} - \Gamma^4_{s1}\Gamma^s_{14} \Rightarrow R_{11} = R^4_{141} = -\Gamma^4_{s1}\Gamma^s_{14} = -\Gamma^4_{41}\Gamma^4_{14} = -a^2$$

$$R_{11} = R^4_{141} = -a^2$$

$$R_{44} = R^1_{414} = \frac{\partial \Gamma^1_{44}}{\partial x^1} - \frac{\Gamma^1_{41}}{\partial x^4} + \Gamma^1_{s1}\Gamma^s_{44} - \Gamma^1_{s4}\Gamma^s_{41} \Rightarrow R_{44} = R^1_{414} = \frac{\partial \Gamma^1_{44}}{\partial x^1} - \Gamma^1_{s4}\Gamma^s_{41} = \frac{\partial \Gamma^1_{44}}{\partial x^1} - \Gamma^1_{44}\Gamma^4_{41}$$

$$\Rightarrow R_{44} = R^1_{414} = \frac{\partial}{\partial x}(-ae^{-2ax}) - (-ae^{-2ax})(-a) = a^2e^{-2ax}$$

$$R_{44} = R^1_{414} = a^2e^{-2ax}$$

الإنحناء السلّمي:

$$R = g^{ij} R_{ij} \Rightarrow R = g^{11} R_{11} + g^{44} R_{44} = (-1)(-a^2) + (\frac{1}{e^{-2ax}})(a^2 e^{-2ax}) = 2a^2$$

$$R = 2a^2$$

معامل تينسور الطاقة لهذا الفضاء:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = kT_{ij} \Rightarrow kT_{44} = R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = a^2 e^{-2ax} - \frac{1}{2}(e^{-2ax})(2a^2) = 0$$

$$kT_{44} = 0$$

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = kT_{ij} \Rightarrow kT_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = -a^2 - \frac{1}{2}(-1)(2a^2) = 0$$

$$kT_{11} = 0$$

هذه معامل قطرية لمصفوفة تينسور جهد الطاقة في هذا الفضاء.

معادلة الجيوديسي لهذا الفضاء:

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = C$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} - 2a \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - (ae^{-2ax}) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0$$

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1 \Rightarrow (ae^{-2ax}) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 = 1$$

نفرض أن $\nu = \frac{dx}{ds}$ إذن:

$$\nu \frac{d\nu}{ds} = a(1+\nu^2) \Rightarrow \ln(1+\nu^2) = 2a(x - x_0) \Rightarrow 1+\nu^2 = e^{2a(x-x_0)}$$

$$1+\nu^2 = e^{2a(x-x_0)}$$

المثال 4

مترية زمكان بهذا الشكل:

$$ds^2 = -a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$$

المطلوب:

علائم كريستوفل المخالفة للصفر

معامل تينسور ريتشي المخالفة للصفر

الإنحناء السلّمي لهذا الفضاء

علائم كريستوفل:

نفرض: $x^1 = x$ و $x^2 = y$ و $x^3 = z$ و $x^4 = t$

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= -a^2(t) \\ g_{22} &= -a^2(t) \\ g_{33} &= -a^2(t) \\ g_{44} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left| \begin{aligned} &\Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = -\frac{1}{2g_{44}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \Rightarrow \Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(-a^2(t)) \\ &\Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \Rightarrow \Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = \frac{1}{-a^2(t)}\frac{\partial}{\partial t}(-a^2(t)) \end{aligned}\right.$$

$$\Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = a\dot{a}$$

$$\Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = \frac{\dot{a}}{a}$$

معامل تينسور ريمان و ريتشي:

$$R^1_{414} = -\frac{\partial \Gamma^1_{41}}{\partial x^4} - \Gamma^1_{41}\Gamma^1_{41} \Rightarrow R^1_{414} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R^1_{414} = R^2_{424} = R^3_{434} = -\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{141}^{4}=-\frac{\partial\Gamma_{11}^{4}}{\partial x^{4}}-\Gamma_{11}^{4}\Gamma_{14}^{1}\Rightarrow R_{414}^{1}=\frac{\partial}{\partial t}\left(a\dot{a}\right)-\left(a\dot{a}\right)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)=a\ddot{a}+2\dot{a}^{2}$$

$$R_{141}^{4}=R_{242}^{4}=R_{343}^{4}=a\ddot{a}+2\dot{a}^{2}$$

$$R_{44}=R_{414}^{1}+R_{424}^{2}+R_{434}^{3}=-3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11}=R_{141}^{4}=a\ddot{a}+2\dot{a}^{2}$$

$$R_{22}=R_{424}^{2}=a\ddot{a}+2\dot{a}^{2}$$

$$R_{33}=R_{343}^{4}=a\ddot{a}+2\dot{a}^{2}$$

الإنحناء السلّمي:

$$R=g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}+g^{33}R_{33}+g^{44}R_{44}=\frac{3}{-f^{2}}\left(a\ddot{a}+2\dot{a}^{2}\right)-3\frac{\ddot{a}}{a}=-6\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)-6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2}$$

$$R=-6\left(\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}}\right)$$

معادلة الجيوديسي لهذا الفضاء:

$$\frac{d^{2}x^{k}}{ds^{2}}+\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^{i}}{ds}\frac{dx^{j}}{ds}=0$$

$$\frac{d^{2}t}{ds^{2}}+\dot{a}\ddot{a}(\frac{dx}{ds})^{2}=0 \qquad \frac{d^{2}x}{ds^{2}}+\frac{\dot{a}}{a}(\frac{dt}{ds}\frac{dx}{ds})=0$$

$$\frac{d^{2}t}{ds^{2}}+\dot{a}\ddot{a}(\frac{dy}{ds})^{2}=0 \qquad \frac{d^{2}y}{ds^{2}}+\frac{\dot{a}}{a}(\frac{dt}{ds}\frac{dy}{ds})=0$$

$$\frac{d^{2}t}{ds^{2}}+\dot{a}\ddot{a}(\frac{dz}{ds})^{2}=0 \qquad \frac{d^{2}z}{ds^{2}}+\frac{\dot{a}}{a}(\frac{dt}{ds}\frac{dz}{ds})=0$$

في هذا الفضاء ذرة في النقطة (x_0, y_0, z_0)، تحت هذا الشرط $0 = \frac{dz}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{ds}$ في لحظة t_0 إذن:

من معادلات الطرف الأيسر:

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 0 \Rightarrow t = t_0 + bs$$

من معادلات الطرف الأيمن:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{vmatrix}$$

هذه الذرة في هذا الفضاء تبقى في مكانها.

المثال 5

المتريته:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

تعرف بمترية كُرتين، علائم كريستوفل لهذا الفضاء هي:

في هذه المترية $\begin{cases} g_{11} = r^2 \\ g_{22} = r^2 \sin^2\theta \end{cases}$ و $x^1 = \theta$ و $x^2 = \phi$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma^1_{11} = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma^1_{22} = -\cos\theta\sin\theta$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma^2_{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma^2_{22} = 0$$

محاسبة معامل تينسور ريمان R_{1212} لهذا الفضاء:

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{sj}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^l_{sk}\Gamma^s_{ij}$$

$$R_{1212} = g_{l2}R^l_{121} = g_{22}R^2_{121}$$

$$R_{1212}=g_{22}\left(\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial x^1}+\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12}\right)$$

$$R_{1212}=r^2\sin^2\theta\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{\sin\theta})-\Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12}\right)=r^2\sin^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$R_{1212}=r^2\sin^2\theta$$

$$R_{11}=g^{22}R_{1212}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}r^2\sin^2\theta=1$$

$$R_{12}=R_{21}=0$$

$$R_{22}=g^{11}R_{1212}=\frac{1}{r^2}r^2\sin^2\theta=\sin^2\theta$$

سلّميّة ريتشى لهذا الفضاء هي كذلك إنحناء هذا الفضاء

$$R=g^{ij}R_{ij}=g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}=\frac{1}{r^2}\times1+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\times\sin^2\theta=\frac{2}{r^2}$$

$$R=\frac{2}{r^2}$$

سلّميّة ريتشي لهذه المترية هي متنوعه (manifold) ذات بعُدين و هي عبارة عن إنحناء كرتين، المتنوعة في الحدّ الأقصى من التناظر.

لأي عدد من الأبعاد، إنحناء فضاء في غاية التناظريصدق في هذه الرابطة:

$$R_{ijkl}=\frac{1}{r^2}\left(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}\right)$$

(في هذه الرابطة r عبارة عن ثابت) يمكن تحقيق صحة هذه الرابطة لهذا المثال.

المثال 6

لكلّ i و j و k و l برّهن على إن:

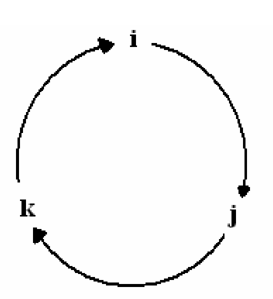
$$R^l_{ijk} + R^l_{kij} + R^l_{jki} = 0$$

بما إن:

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{sj}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^l_{sk}\Gamma^s_{ij}$$

إذن:

$$\begin{aligned}
&R^l_{ijk} + R^l_{kij} + R^l_{jki} = \\
&= \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{sj}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^l_{sk}\Gamma^s_{ij} \\
&+ \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{si}\Gamma^s_{kj} - \Gamma^l_{sj}\Gamma^s_{ki} \\
&+ \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^l_{sk}\Gamma^s_{ji} - \Gamma^l_{si}\Gamma^s_{jk} \\
&= 0
\end{aligned}$$



موقع الدليل في الأسفل بهذا الترتيب في جهة السهم

المثال 7

مترية فضاء منكو فسكي في إحداثي كروي (t,r,θ,ϕ) هي:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 \Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 - dt^2$$

إذا كانت مترية هذا الفضاء بهذا الشكل:

$$ds^2 = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 - e^{2\alpha(r)} dt^2$$

علائم كريستوفل لهذه المترية هي:

$$\Gamma^1_{11} = \beta' \qquad \Gamma^1_{44} = e^{2(\alpha-\beta)}\alpha' \qquad \Gamma^4_{41} = \alpha'$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^1_{22} = -re^{2\beta} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^1_{33} = -re^{2\beta}\sin^2\theta$$

لو إن $\alpha(r) = \beta(r) = 0$ تصبح هذه المترية كالمترية الأولى أي:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 - dt^2$$

ثم تصبح علائم كريستوفل بهذا الشكل:

$$\Gamma^1_{11} = 0 \qquad \Gamma^1_{44} = 0 \qquad \Gamma^4_{41} = 0$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^1_{22} = -r \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta$$

المثال 8

مترية روبرتسون – واكر

$$ds^2 = a^2(t)\left[\frac{dr}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right] - dt^2$$

في هذه المترية:

$$\begin{array}{|l} g_{11} = \dfrac{a^2(t)}{1-kr^2} \\ g_{22} = a^2(t) r^2 \\ g_{33} = a^2(t) r^2 \sin^2\theta \\ g_{44} = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} x^1 = r \\ x^2 = \theta \\ x^3 = \phi \\ x^4 = t \end{array}$$

علائم كريستوفل لهذه المترية إذا كان $\dot{a} = \dfrac{da}{dt}$ هي:

$$\Gamma^4_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}$$
$$\Gamma^4_{22} = a\dot{a}r^2$$
$$\Gamma^4_{33} = a\dot{a}r^2 \sin^2\theta$$

$$\Gamma^1_{41} = \Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{42} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{43} = \Gamma^3_{34} = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2)$$
$$\Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

معامل تينسور ريتشي المخالفة للصفر هي:

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$$

$$R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\sin^2\theta$$

$$R_{44} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

سلّميّة ريتشي لهذا الفضاء هي:

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44} = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

تينسور أنشتاين

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{1 - kr^2}\frac{6}{a^2}\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k\right)$$

$$G_{11} = -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{1 - kr^2}$$

$$G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R = r^2\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right) - \frac{1}{2}\left(a^2r^2\right)\frac{6}{a^2}\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k\right)$$

$$G_{22} = -r^2\left(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k\right)$$

$$G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R = r^2\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\sin^2\theta - \frac{1}{2}\left(a^2r^2\sin^2\theta\right)\frac{6}{a^2}\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k\right)$$

$$G_{33} = -r^2\left(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k\right)\sin^2\theta$$

$$G_{44} = R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = -\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-1)\frac{6}{a^2}\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k\right)$$

$$G_{44} = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2}$$

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} = \frac{G_{22}}{g_{22}} = \frac{G_{33}}{g_{33}} = -\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$$

المثال 9

مترية فضاء بهذا الشكل:

$$ds^2 = e^{-2\phi(x)}dx^2 - e^{-2\psi(x)}dt^2$$

برّهن في حالة $\phi(x) = \psi(x)$ فهذا الفضاء هو فضاء مسطح.

$$\begin{vmatrix} g_{11} = e^{-2\phi(x)} \\ g_{22} = -e^{-2\psi(x)} \end{vmatrix} \qquad \frac{d}{dx}\phi(x) = \phi' \qquad \frac{d}{dx}\psi(x) = \psi'$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x} \Rightarrow \Gamma^1_{11} = -\phi'$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial t} \Rightarrow \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x} \Rightarrow \Gamma^1_{22} = -\psi' e^{2(\phi-\psi)}$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial t} \Rightarrow \Gamma^2_{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x} \Rightarrow \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\psi'$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial t} \Rightarrow \Gamma^2_{22} = 0$$

$$R_{1212} = g_{22}\left(\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12}\right)$$

$$R_{1212} = -e^{-2\psi}\left(\psi'' + \psi'\phi' - \psi'^2\right)$$

$$R_{11} = g^{22} R_{1212} = \frac{1}{-e^{-2\psi}}\left(-e^{-2\psi}\left(\psi'' + \psi'\phi' - \psi'^2\right)\right) = \psi'' + \psi'\phi' - \psi'^2$$

$$R_{12} = R_{21} = 0$$

$$R_{22} = g^{11} R_{1212} = \frac{1}{e^{-2\phi}}\left(-e^{-2\psi}\left(\psi'' + \psi'\phi' - \psi'^2\right)\right) = -e^{2(\phi-\psi)}\left(\psi'' + \psi'\phi' - \psi'^2\right)$$

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{1}{e^{-2\phi}}\left(\psi'' + \psi'\phi' - \psi'^2\right) - \frac{1}{-e^{-2\psi}}\left(-e^{2(\phi-\psi)}\left(\psi'' + \psi'\phi' - \psi'^2\right)\right)$$

$$R = 0$$

المثال 10

عيّن كلّ من علائم كريستوفل و معادلة الجيوديسي للمترية:

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}dx^2 + \frac{1}{y^2}dy^2$$

تعرف هذه المترية بصفحة لوباتشفسكي أو الصفحة الهذلولية

الحل:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2} \quad و \quad g_{12} = g_{12} = 0$$

نفرض: $x^1 = x$ و $x^2 = y$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma^1_{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma^2_{12} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma^1_{22} = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$$

معادلة الجيوديسي لهذه المترية هي:

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0$$

$$g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = C$$

C في هذه الرابطة مقدار ثابت.

حسب علائم كريستوفل نكتب معادلات الجيوديسي:

بما أن $x^1 = x$ و $x^2 = y$ إذن:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{\left(y(t)\right)^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = a^2$$

a^2 مقدار ثابت كما فرضنا C

جواب المعادلة الإشتقاقية الأولى هو:

y عبارة عن دالة المتغيرفيها t و نفرض $\frac{dx}{dt} = F$ إذن:

$$\frac{dx}{dt} = F \Rightarrow \frac{dF}{dt} = (\frac{2}{y}\frac{dy}{dt})F \Rightarrow \frac{dF}{F} = 2\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln F = \ln y^2 + \ln b \Rightarrow \ln F = \ln by^2$$

$$F = by^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = by^2$$

نضع هذا الجواب في المعادلة الثالثة النتيجة:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + b^2 y^4(t) = a^2 y^2(t)$$

جواب هذه المعادلة الإشتقاقية هو:

$$y(t) = \frac{ay_0}{a \cdot \cosh at - \sqrt{a^2 - \left(b^2 y^2{}_0\right)}\sinh at}$$

y_0 هي قيمة بدائية لجواب هذه المعادلة

بما أن $\frac{dx}{dt}=by^2$ إذن:

$$x(t)=x_0+\frac{\left(by^2{}_0\right)\sinh at}{a\cdot\cosh at-\sqrt{a^2-\left(b^2y^2{}_0\right)}\sinh at}$$

x_0 قيمة بدائية.

من $y(t)$ و $x(t)$ نحصل على:

$$\sinh at=\frac{a}{by_0}\frac{x-x_0}{y}$$

$$\cosh at=\frac{by^2{}_0-(x-x_0)\sqrt{a^2-b^2y^2{}_0}}{by_0y}$$

بما أن $\cosh^2 at-\sinh^2 at=1$ يمكن حذف s من هذه الروابط و النتيجه النهائية هي:

$$(x-x_0)^2-2(x-x_0)\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-y^2{}_0}+y^2=y^2{}_0$$

أو

$$\left(x-x_0-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-y^2{}_0}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}$$

هذه عبارة عن دائره نصف قطرها $\frac{a}{b}$ و إحداثيات المركز $\left| \begin{matrix} x_0+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-y^2{}_0} \\ 0 \end{matrix} \right.$ المركز.

هذا المركز منطبق على محور x. المتقاصر أو جيوديسية هذا الفضاء هي دائرة مغلقة، لو (إن متحرك) أو نبضة ضوئية أنطلقت في هذا الفضاء، فإن مسير حركتها هي دائرة و سترجع هذه النبضة الضوئية (أو المتحرك) في هذا الفضاء الى نقطة إنطلاقها.

المثال 11

مترية و فضاء غودل

في عام 1949 عرض كورت غودل (Kurt Godel) حل جديد لمعادلات حقل أنشتاين ، لكون ذو مادة دوارة ، دوران هذا الكون حدود 0.01 ثانية في القرن . في هذا النموذج الكوني وجود منحنيات الزمكان المغلقة يتيح للمنحني العبور من اي نقطة في هذا الفضاء ، و هذا بالتالي يسمح للمراقب السفر الى الماضي.

عرضنا هذا النموذج الكوني في هذا المثال و ذلك لأننا لن نستطرق الى تأثير الحركة الدورانية في النسبية ، و هو بحث خاص في النسبية الخاصة و العامة يبحث مفاهيم و قوانين النسبية على الأطار الدوار.

نبحث في هذا المثال البعد الرياضي لهذا النموذج و هناك تحقيقات و اسعة أجريت على هذا النموذج بالأخصّ مفهوم السفر الى الماضي ، لكن لن يأخذ هذا النموذج الكوني مكانة في الفيزياء و علم الفلك كالمكانة التي أخذها نموذج فريدمان. سنكتفي ببعض المحاسبات التي تتماشا مع المفاهيم النسبية التي بحثناها في هذا البحث.

مترية غودل في فضاء رباعي الأبعاد بهذا الشكل

$$ds^2 = a^2(dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2x}}{2}dy^2 - dz^2 + 2e^x dtdy)$$

في هذه المترية $a > 0$ و بما أن:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

$$g_{13}dx^1 dx^3 + g_{31}dx^3 dx^1 \Rightarrow 2g_{13}dx^1 dx^3$$

لذلك:

$$2g_{13} = 2e^{-x} \Rightarrow g_{13} = e^{-x}$$

إذن:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow g_{ij} = a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^x & 0 & \frac{e^{2x}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

و كذلك:

$$g = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & a^2e^x & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ a^2e^x & 0 & \frac{a^2e^{2x}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{vmatrix} = \frac{a^8e^{2x}}{2}$$

إذن:

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{21} & g^{31} & g^{41} \\ g^{12} & g^{22} & g^{32} & g^{42} \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} & g^{43} \\ g^{14} & g^{24} & g^{34} & g^{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow g^{ij} = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2e^{-x} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2e^{-x} & 0 & -2e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

علائم كريستوفل لهذه المترية:

العلائم المخالفة للصفر هي:

$$\Gamma^1_{12} = 1$$

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{13} = \frac{e^x}{2}$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\Gamma^3_{12} = -e^{-x}$$

لكل علائم كريستوفل $\frac{\partial}{\partial x^{i}}=0$ ما عدى $i=1$ لذلك:

$$R_{ij}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^{2}_{ij}+\Gamma^{1}_{ij}-\Gamma^{t}_{si}\Gamma^{s}_{tj}$$

إذن معامل تينسور ريتشي المخالفة للصفر هي:

$$R_{11}=1$$

$$R_{13}=R_{31}=e^{x}$$

$$R_{33}=e^{2x}$$

سلمية ريتشي لهذا الفضاء هي:

$$R=g^{ij}R_{ij}\Rightarrow R=g^{11}R_{11}+g^{13}R_{13}+g^{31}R_{31}+g^{33}R_{33}$$

$$R=-\frac{1}{a^{2}}\times 1+\frac{2e^{-x}}{a^{2}}\times e^{x}+\frac{2e^{-x}}{a^{2}}\times e^{x}-\frac{2e^{-2x}}{a^{2}}\times e^{2x}=\frac{1}{a^{2}}$$

$$R=\frac{1}{a^{2}}$$

مترية غودل $ds^2 = a^2(dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2x}}{2}dy^2 - dz^2 + 2e^x dtdy)$ هذه أحياناً تكتب بهذا الشكل :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2\sqrt{2}\omega x}}{2}dy^2 - dz^2 + 2e^{\sqrt{2}\omega x}dtdy$$

ω ثابت مخالف للصفر ،يُعبّر عن سرعة الزاوية

هذه المترية في الإحداثيات الأسطوانية بهذا الشكل:

$$ds^2 = 4a^2(dt^2 - dr^2 - dy^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r)d\phi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r d\phi dt)$$

في هذه المترية:

$r \geq 0$

$0 \leq \phi \leq 2\pi$

المادة في عالم غودل عبارة عن غبار ذو كثافة ثابتة ، تينسور الطاقة في هذا العالم هو $T^{ij} = \rho u^i u^j$

في هذا التينسور ρ الكثافة و u^j و u^i السرعة . كذلك $\rho = \frac{1}{8\pi G a^2}$ و G ثابت الجاذبية العام لنيوتن ، و الثابت الكوني في هذا العالم هو $\Lambda = -\frac{1}{2a^2}$.

تمرين:

مترية عالم أنشتاين بهذا الشكل:

$$ds^2 = -\frac{dr}{1-kr^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + c^2 dt^2$$

أوجد معادلات مسارجيوديسي هذا الفضاء، ثم برّهن:

في الصفحة $\theta = \frac{\pi}{2}$ تصدق منحنيات مسار الجيوديسي في هذه المعادلة:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^2(1-\lambda r^2)(\mu r^2 - 1)$$

في هذه المعادلة μ ثابت.

ضع في هذه المعادلة $r^2 = \frac{1}{\nu}$ ثم أستنتج من تكامل المعادلة الحاصلة أن مسير شعاع الضوء في الصفحة $\theta = \frac{\pi}{2}$ عبارة عن إهليلجي ، معادلته هي:

$$\lambda x^2 + \nu y^2 = 1$$

في هذه المعادلة x و y إحداثيات الكارتيزية.

أثبت أن الزمان اللازم لدورة واحدة يدورها فوتون في مسير هذا الإهليلجي هي $\frac{2\pi}{c\sqrt{\lambda}}$ ثانية (في هذ الرابطة c سرعة الضوء).

بعض أهم الأصطلاحات الفيزيائيه و الرياضيه و الفلسفيه في نظرية

النسبية العامة

General Relativity Glossary

(عربي - إنجليزي)

Dilation of time	إتساع الزمن
Summation convention	إتفاقية الجمع
Doppler effect	أثر دوبلر
Compton effect	أثر كامبتون
Parallel displacement	إزاحه موازيه
Fundamentalist	أصولي
Even horizon	أفق الحدث
Agree posteriori	الأتفاق اللاحق أو ما يأتي بعد التجربه
Agree priori	الأتفاق المسبق أو ما قبل التجربه
Aether	الأثير
Coordinate	الإحداثيات
Coordinate surface	الإحداثيات السطحيه
Gravitational red shift	الإزاحة الحمراء بالجاذبيه
Parallel transpotr	الإنتقال الموازي
Big Bang	الأنفجار العظيم
Torsion	ألتواء
Space warp	ألتواء الفضاء أو أنطواء الفضاء
First fundamental form	الشكل الأساسي الأول
Second fundamental form	الشكل الأساسي الثاني
Curvature	إنحناء أو تقوس
Geodesic curvature	إنحناء جيوديسي
Ricci curvature	إنحناء ريتشي
Scalar curvature	إنحناء مقياس أو إنحناء سلّمي أو تقوس سلّمي
Fitzgerald contraction	أنقباض فيتزجيرالد
Contraction	انكماش – تقليص- أدغام
Elliptic	إهليلجي
Dimension	بُعد
Bolyai	بوليائي
Evidence	بيّنة

Affinity	تآلف
Affine	تآلفي
Divergence	تباعد
Lorentz transformation	تبديلات لورينتز
Skew- symmetric	تخالفية التناظر
skew-symmetric	تخالفية التناظر
Gradient	تدرّج
Connection	ترابطيه
Superposition	تراكب
Quadratic	تربيعيه
simultaneity	تزامن
Synchronization	تزامن
Synchronization of clocks	تزامن الساعات
Gravitational acceleration	تسارع الجاذبيه
Rectification	تصحيح
Apriori cincept	تصور قبلي
Congruence	تطابق
Mapping	تطابق
Acceleration	تعجيل
Differential	تفاضلي
Contradiction	تقليص في التينسور
Equivalence	تكافؤ
Equivalence of mass	تكافؤ الكتلة
Mass – Energy equivalence	تكافؤ الكتلة و الطاقة
Homology	تماثل
Representation	تمثل أو فكرة
Spherically symmetric	تناظر كروي
Contradiction	تناقض
Consistency	تواؤم
Curvature tensor	تينسور الإنحناء
Einstein’s tensor	تينسور أنشتاين
tensor	تينسور أو موتر
Levi-Civita tensor	تينسور لوي شي و يتا
Metric tensor	تينسور متري
Gravitational constant	ثابت الجاذبيه
Cosmical constant	ثابت كوني
Black hole	ثقب أسود

Wormhole	ثقب دودي
Gravity	جاذبية
Scalar product	جداء سُلّمي
Gravitational potential	جهد الجاذبيه
Potential	جهد أو كمون
Geodesic	جيوديسي أو متقاصره
Event	حادثه ـ واقعه
Bounded	حدّي
Kinetic	حركيه
Tensor calculus	حساب التينسور
Perihelion	حضيض
Conservation	حفظ
Gravitational field	حقل الجاذبيه
Einstein field	حقل أنشتاين
Tensor field	حقل تينسوري
Invariant field	حقل لا متغير
Vector field	حقل متجهي
Field due to	حقل مرتبط ب
Absurd statement	حكم لا معقول
Property	خصوصيه
World- line	خط عالمي
Osculation circle	دائرة الألتصاق
Kronecker delta	دلتا كرونكر
Curl	دوران
Ricci	ريتشي
Aberation of light	زيغ الضوء أو إنحراف الضوء
Velocity	سرعه
Umbilical	سُرّية
Saddle surface	سطح سَرجي
Catenoid	سطح سلسلي الشكل
Helicoid	سطح لولبي
Pseudoplane	شبه صفحه
Pseudosphere	شبه كره
Electrical intensity	شدّة الحقل الكهربائي
Magnetic intensity	شدّة الحقل المغناطيسي
Radiation	شعاع أو أشعة
Sirius	شعري اليمانية

Schwarzschild	شوارتز شيلد
Energy	طاقه
Centrifugal	طرد مركزي
Axiomatic method	طريقه موضوعاتيه
Phenomenon	ظاهرة
Gravitational lens	عدسة الجاذبية
Momentum	عزم – زخم – كمية الحركة
Christoffel symbols	علائم كريستوفل- رموزكريستوفل
Element	عنصر- أصل كتاب إقليدس
Defect	عيب أو نقصان
Graviton	غرافيتون
Excess	فائض
Interval	فاصله
Mass less	فاقد الكتلة
Space	فضاء
Space – time	فضاء - زمان أو زمكان
Euclidean space	فضاء إقليدي
Riemannian space	فضاء ريماني
Physical space	فضاء فيزيائي
Non- Euclidean space	فضاء لا إقليدي
Absolute future	فضاء مطلق
Ultra – ideal	فوق المثالي
Hypersphere	فوق كره
Einstein’s law of gravitation	قانون الجاذبيه لأنشتاين
Galilean law of inertia	قانون العطاله لغاليلو
Biot- Savart law	قانون بيو ساوار
Force	قوّه
Mass	كتلة
Mass inertial	كتلة العطالة - الكتله العاطله
Massive mass	كتلة ضخمة
Galactic mass	كتلة مجريّة
Density	كثافه
Quantum	كمّ أو الكوانتوم
Universe	كون
Invariant	لا متغير
Infinite	لا متناهي
Helix	لولب

Absolute past	ماضي مطلق
Principle of equivalence	مبدأ التكافؤ
General principle of relativity	مبدأ النسبيه العامه
Special principle of relativy	مبدأ لنسبيه الخاصه
Machs principle	مبدأ ماخ
Curvature vector	متجهة الإنحناء
Coaxial	متحد المحاور
Metric	مترية
Isogonal	متساوي الزوايا
Equidistance	متساوي الفاصله
Isoareal	متساوي المساحه
Bianchi identity	متطابقة بيانجي
Orthogonal	متعامد
Variable	متغير
Isometric	متقايس
Equivalent	متكافئ
Manifold	متنوّعه ـ مُشعّب
Controversial	مثير للجدل
paraboloid	مجسّم مكافئ
Conform	محافظ
Conformal	محافظ – حفاظ الشكل
Local	محلي
Paradox	محيًره
Contravariant	مخالف للتغير
Light cone	مخروط الضوء
Conoid	مخروطاني
Orbit	مدار
Observer	مراقب أو ناظر
Order	مرتبه
Component	مركّبه أو عنصر
Rectilinear	مستقيم
Flat	مسطّح
Postulate	مسلّمه
Trajectory	مسير
Derivative	مشتق
Assertion	مصادقه
Equation of continuity	معادلة الحفظ

Tensor equation	معادله تينسوريه
Coexistence	معيه
Fallacy	مغالطه
Asymptotic	مقارب
Parabolic	مكافئ
Discriminant	مميّزة
Curve rectifiable	منحن متناهي الطول
Catenary	منحني السلسله
Minkowski	منكو فسكي
Covariant	موافق للتغّر
Axiom	موضوعه
System	نظام
Ideal point	نقطه مثاليه
Model	نموذج
Incidence geometry	هندسة الوقوع
Non-Euclidean geometry	هندسة لاإقليدية
Elliptic geometry	هندسه إهليليجيه
Affine geometry	هندسه تآلفيه
Intrinstic geometry	هندسه ذاتيه
Parabolic geometry	هندسه شلجميه
Pan - geometry	هندسه عموميه
Spherical geometry	هندسه كرويه
Absolute geometry	هندسه مطلقه
Hyperbolic geometry	هندسه هذلوليه
Inertial frame	هيكل أو مرجع العاطل
Existential	وجودي
Unit	وحدة
Parametric	وسيطيه أو معلمي

بعض أهم الأصطلاحات الفيزيائيه و الرياضيه و الفلسفيه في نظرية

النسبية العامة

General Relativity Glossary

(إنجليزي - عربي)

Aberation of light	زيغ الضوء أو إنحراف الضوء
Absolute future	فضاء مطلق
Absolute geometry	هندسه مطلقه
Absolute past	ماضي مطلق
Absurd statement	حكم لا معقول
Acceleration	تعجيل
Aether	الأثير
Affine	تآلفي
Affine geometry	هندسه تآلفيه
Affinity	تآلف
Agree posteriori	الأتفاق اللاحق أو ما يأتي بعد التجربه
Agree priori	الأتفاق المسبق أو ما قبل التجربه
Apriori cincept	تصور قبلي
Assertion	مصادقه
Asymptotic	مقارب
Axiom	موضوعه
Axiomatic method	طريقه موضوعاتيه
Bianchi identity	متطابقة بيانجي
Big Bang	الأنفجار العظيم
Biot- Savart law	قانون بيو ساوار
Black hole	ثقب أسود
Bolyai	بولیائي
Bounded	حدّي
Catenary	منحني السلسله
Catenoid	سطح سلسلي الشكل
Centrifugal	طرد مركزي
Christoffel symbols	علائم كريستوفل- رموزكريستوفل
Coaxial	متحد المحاور
Coexistence	معيه

Component	مركّبه أو عنصر
Compton effect	أثر كامبتون
Conform	محافظ
Conformal	محافظ – حفاظ الشكل
Congruence	تطابق
Connection	ترابطيه
Conoid	مخروطاني
Conservation	حفظ
Consistency	تواؤم
Contraction	انكماش – تقليص- أدغام
Contradiction	تقليص في التينسور
Contradiction	تناقض
Contravariant	مخالف للتغير
Controversial	مثير للجدل
Coordinate	الإحداثيات
Coordinate surface	الإحداثيات السطحيه
Cosmical constant	ثابت كوني
Covariant	موافق للتغّر
Curl	دوران
Curvature	إنحناء أو تقوس
Curvature tensor	تينسور الإنحناء
Curvature vector	متجهة الإنحناء
Curve rectifiable	منحن متناهي الطول
Defect	عيب أو نقصان
Density	كثافه
Derivative	مشتق
Differential	تفاضلي
Dilation of time	إتساع الزمن
Dimension	بُعد
Discriminant	مميّزة
Divergence	تباعد
Doppler effect	أثر دوبلر
Einstein field	حقل أنشتاين
Einstein’s law of gravitation	قانون الجاذبيه لأنشتاين
Einstein’s tensor	تينسور أنشتاين
Electrical intensity	شدّة الحقل الكهربائي
Element	عنصر- أصل كتاب إقليدس

Elliptic	إهليلجي
Elliptic geometry	هندسه إهليليجيه
Energy	طاقه
Equation of continuity	معادلة الحفظ
Equidistance	متساوي الفاصله
Equivalence	تكافؤ
Equivalence of mass	تكافؤ الكتلة
Equivalent	متكافئ
Euclidean space	فضاء إقليدي
Even horizon	أفق الحدث
Event	حادثه - واقعه
Evidence	بيّنة
Excess	فائض
Existential	وجودي
Fallacy	مغالطه
Field due to	حقل مرتبط ب
First fundamental form	الشكل الأساسي الأول
Fitzgerald contraction	إنقباض فيتزجيرالد
Flat	مسطّح
Force	قوّه
Fundamentalist	أصولي
Galactic mass	كتلة مجريّة
Galilean law of inertia	قانون العطاله لغاليلو
General principle of relativity	مبدأ النسبيه العامه
Geodesic	جيوديسي أو متقاصره
Geodesic curvature	إنحناء جيوديسي
Gradient	تدرّج
Gravitational acceleration	تسارع الجاذبيه
Gravitational constant	ثابت الجاذبيه
Gravitational field	حقل الجاذبيه
Gravitational lens	عدسة الجاذبية
Gravitational potential	جهد الجاذبيه
Gravitational red shift	الإزاحة الحمراء بالجاذبيه
Graviton	غرافيتون
Gravity	جاذبية
Helicoid	سطح لولبي
Helix	لولب

Homology	تماثل
Hyperbolic geometry	هندسه هذلوليه
Hypersphere	فوق كره
Ideal point	نقطه مثاليه
Incidence geometry	هندسة الوقوع
Inertial frame	هيكل أو مرجع العاطل
Infinite	لا متناهي
Interval	فاصله
Intrinstic geometry	هندسه ذاتيه
Invariant	لا متغير
Invariant field	حقل لا متغير
Isoareal	متساوي المساحه
Isogonal	متساوي الزوايا
Isometric	متقايس
Kinetic	حركيه
Kronecker delta	دلتا كرونكر
Levi-Civita tensor	تينسور لوي شي و يتا
Light cone	مخروط الضوء
Local	محلي
Lorentz transformation	تبديلات لورينتز
Machs principle	مبدأ ماخ
Magnetic intensity	شدّة الحقل المغناطيسي
Manifold	متنوّعه - مُشعّب
Mapping	تطابق
Mass	كتلة
Mass – Energy equivalence	تكافؤ الكتلة و الطاقة
Mass inertial	كتلة العطالة - الكتله العاطله
Mass less	فاقد الكتلة
Massive mass	كتلة ضخمة
Metric	مترية
Metric tensor	تينسور متري
Minkowski	منكو فسكي
Model	نموذج
Momentum	عزم – زخم – كمية الحركة
Non- Euclidean space	فضاء لا إقليدي
Non-Euclidean geometry	هندسة لا إقليدية
Observer	مراقب أو ناظر

Orbit	مدار
Order	مرتبه
Orthogonal	متعامد
Osculation circle	دائرة الألتصاق
Pan - geometry	هندسه عموميه
Parabolic	مكافئ
Parabolic geometry	هندسه شلجميه
paraboloid	مجسّم مكافئ
Paradox	محيًره
Parallel displacement	إزاحه موازيه
Parallel transpotr	الإنتقال الموازي
Parametric	وسيطيه أو معلمي
Perihelion	حضيض
Phenomenon	ظاهرة
Physical space	فضاء فيزيائي
Postulate	مسلّمه
Potential	جهد أو كمون
Principle of equivalence	مبدأ التكافؤ
Property	خصوصيه
Pseudoplane	شبه صفحه
Pseudosphere	شبه كره
Quadratic	تربيعيه
Quantum	كمّ أو الكوانتوم
Radiation	شعاع أو أشعة
Rectification	تصحيح
Rectilinear	مستقيم
Representation	تمثل أو فكرة
Ricci	ريتشي
Ricci curvature	إنحناء ريتشي
Riemannian space	فضاء ريماني
Saddle surface	سطح سَرجي
Scalar curvature	إنحناء مقياس أو إنحناء سلّمي أو تقوس سلّمي
Scalar product	جداء سُلّمي
Schwarzschild	شوارتز شيلد
Second fundamental form	الشكل الأساسي الثاني
simultaneity	تزامن
Sirius	شعري اليمانية

Skew- symmetric	تخالفية التناظر
skew-symmetric	تخالفية التناظر
Space	فضاء
Space – time	فضاء - زمان أو زمكان
Space warp	ألتواء الفضاء أو أنطواء الفضاء
Special principle of relativy	مبدأ النسبيه الخاصه
Spherical geometry	هندسه كرويه
Spherically symmetric	تناظر كروي
Summation convention	إتفاقية الجمع
Superposition	تراكب
Synchronization	تزامن
Synchronization of clocks	تزامن الساعات
System	نظام
tensor	تينسور أو موتر
Tensor calculus	حساب التينسور
Tensor equation	معادله تينسوريه
Tensor field	حقل تينسوري
Torsion	ألتواء
Trajectory	مسير
Ultra – ideal	فوق المثالي
Umbilical	سُرّية
Unit	وحدة
Universe	كون
Variable	متغير
Vector field	حقل متجهي
Velocity	سرعه
World- line	خط عالمي
Wormhole	ثقب دودي

المصادر

- الزمان الوجودي – عبد الرحمن بدوي - دار الثقافة بيروت لبنان – 1973
- معجم الرياضيات (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. علي مصطفى بن الأشهر، أكاديما.
- معجم الفيزياء (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. أبراهيم حموده، أكاديما.
- كنط و فلسفته النظرية – دكتور محمود زيدان – دار المعارف – الطبعه الثالثه – 1979
- الزمان في الفلسفة و العلم – الدكتور يمني طريف الخولى – مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب – 1999
- نقد العقل المحض – عمّا نوئيل كنط – ترجمة موسى وهبة.
- المورد ، قاموس إنجليزي – عربي ، منير البعلبكي – دار العلم للملايين.

- Essential Relativity:special, General and Cosmological, Wolfang Rindler, 1977
- Introduction to Special Relativity, Wiley Fastern, Private Limited. 1972
- Lecture Notes on General Relativity, Sean M. Carrroll, Institute for Theoretical Physics University of California, 1997
- Introduction to General Relativity, G. t Hooft, Institute for Theoretical Physics University Utrech University, version 8/4/2002
- Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Second edition, Marvin Jay Greenberg, W. H. Freeman & Co. , 1979.
- An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosomology, Derek F. Lawden, 1982.
- Non-Euclidian Geometry, Harold E. Wolfe.

الفهرس

المقدمه ---3
الفضاء المطلق ---11
- البرهان الكانتي على أن للعالم بدآية في الزمن ---13
- البرهان الكانتي على أن العالم محدود في المكان --- 13
المفهوم الفلسفي للمكان --16
النظرة الفلسفية و الفيزيائية للزمان --18
- الزمان من وجهة نظر أرسطو وأفلاطون ---18
- الزمان من وجهة نظر نيوتن ---20
- الزمان من وجهة نظر ليبنتس ---20
- الزمان من وجهة نظر كانت ---21
- الزمان في النظريه النسبيه ---23
- الزمان في نظرية الكمّ --24
الهندسه الهذلوليه --- **27**
- الهندسه في الفضاء الماديّ -- 29
- بعض مفاهيم و قضايا الهندسه الهذلوليه --31
- رباعي أضلاع ساكري ---31
- رباعي أضلاع لامبرت ---31
- نقصان المساحة --32
- زاوية التوازي ---34
- بعض قضايا الهندسة الهذلولية --36
- نموذج بلترامي – كلاين --39
النسبية الخاصة --43
- الأصول التي بُنيت عليها نظرية النسبيه ---43
- مفهوم المراقب في النسبية ---44

- تحويلات لورنتز ---45
- أهم نتائج تحويلات لورنتز ---48
- ديناميك النسبية الخاصة --51

النسبية العامة

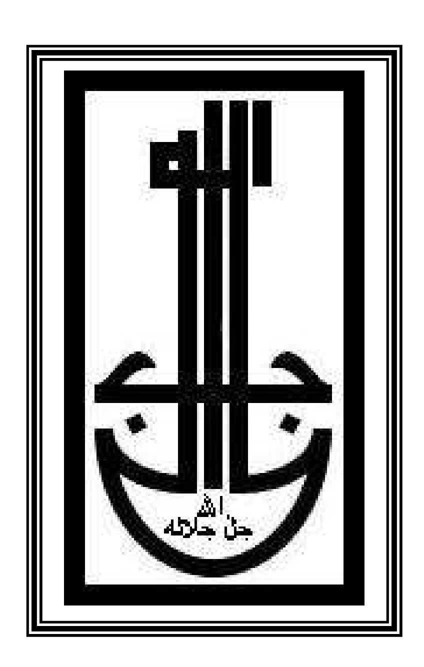
- السطوح الدورانيه--- 57
- العناصر الأساسيه لنظرية السطوح --60
- بعض الاعمال الرياضيه على التينسور ---62
- الشكل الأساسي الأول للسطح --65
- الشكل الأساسي الثاني للسطح --66
- إنحناء غاوس ---68
- مساحة السطح --71
- طول قوس منحني --71
- الإنحناء الجيوديسي --72
- الجيوديسي ---73
- رياضيات النسبيه العامه --74
- الأنتقال الموازي --78
- تينسور إنحناء ريمان – كريستوفل ---80
- بعض أهم معادلات النسبية العامة --83
- مراحل طرح وحلّ و البحث في مسائل النسبية العامة -------------------------------84
- نموذج رياضي لروابط النسبية العامة يمكن تطبيقه على الحاسوب ------------------------86
- مبدأ الكوسومولوجيا --93
- أهم مفاهيم المترية في نظرية النسبية العامة --------------------------------------95
- قانون الجاذبيه لأنشتاين --104
- حلّ شوارتز شيلد --106
- مدار الكواكب ---112
- إنحراف مسير الضوء ---119

- إنزياح الطيف --122
- معادلات الحقل عند تواجد المادة ---127
- ديناميكيا الكون --131
- الأمثله --137

بعض أهم الأصطلاحات الفيزيائيه و الرياضيه و الفلسفيه في نظرية النسبية العامة (عربي – إنجليزي) ------167

بعض أهم الأصطلاحات الفيزيائيه و الرياضيه و الفلسفيه في نظرية النسبية العامة (إنجليزي – عربي)------ 173

المصادر -- 179



موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com